$p\ (N/m^2 = Pa)$ $\gamma\ (N/m^3)$

$\mu\ \left(\frac{N\cdot s}{m^2} = Pa\cdot s\right)$

$\nu\ (m^2/s)$

Συμπιεστότητα: $E_v = -\frac{dp}{dV/V}$ ή $E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho}$

Σπηλαίωση: φυσαλίδες προσκρούουν στο τοίχωμα και προκαλλούν διάβρωση ή και ρηγμάτωση

$\nu_{H_2O} = 10^{-6}\ m^2/s$

Η πίεση δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου. (μόνο από p_0, γ, h)

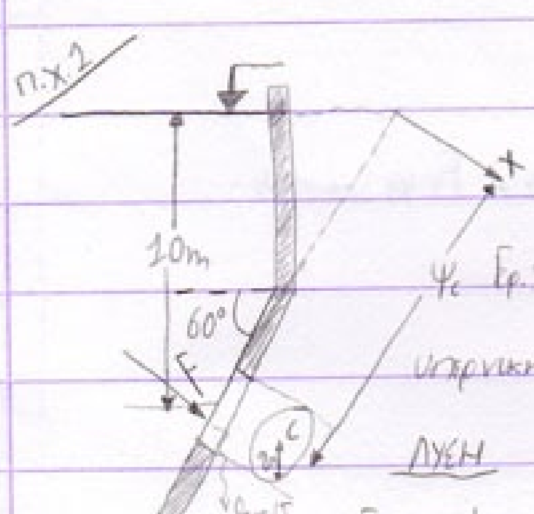
Κεκλιμένη επιφάνεια

$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A$

Συντεταγμένες κέντρου πίεσης: $\psi_R = \frac{I_{xc}}{\psi_c \cdot A} + \psi_c$

και $x_R = \frac{I_{x\psi c}}{\psi_c \cdot A} + x_c$

π.χ.2



$D = 4m$, $\gamma = 9{,}8\ kN/m^3$

ψ_c F_R: Συντεταγμένη και ροπή ως προς άξονα για να υπολογίσουμε τη ροπή του νερού.

ΛΥΣΗ

$F = \gamma \cdot h_c A = 9{,}8\cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 4 = 1230 \cdot 10^3 N$

ψ

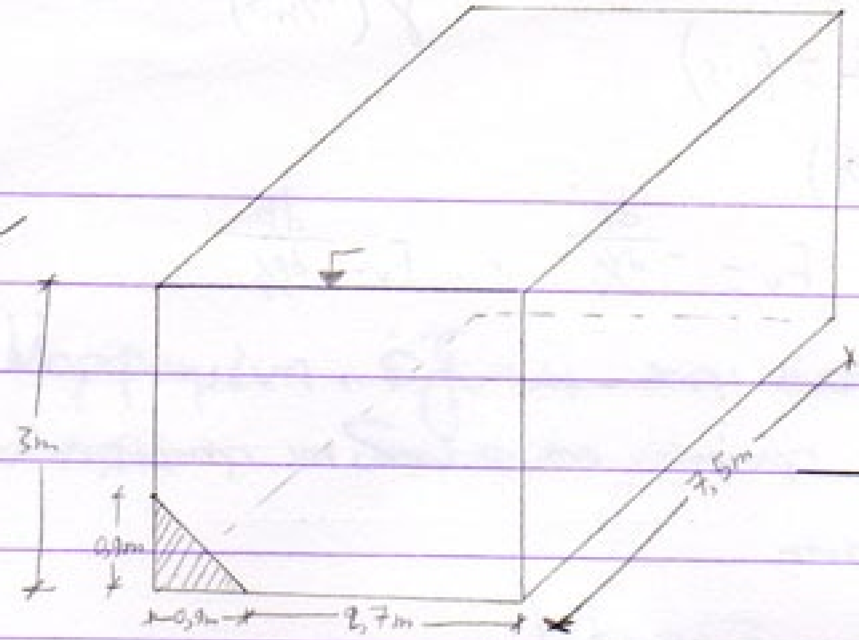
$x_R = \frac{I_{x\psi c}\to 0}{\cancel{\psi_c A}} + x_c = x_c$

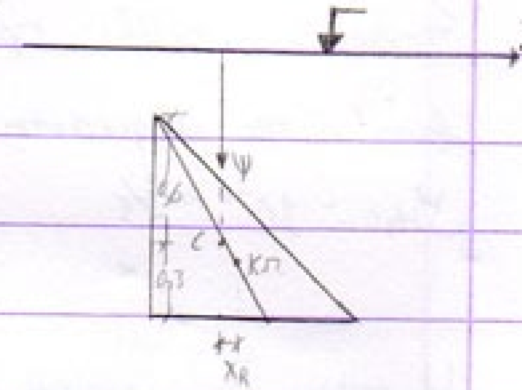
$\psi_R = \frac{I_{xc}}{\psi_c A} + \psi_c = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{10}{\sin 60°}\cdot 4\pi} + \frac{10}{\sin 60°} = 11{,}6m$

$d = \psi_R - \psi_c = 0{,}0866m$

$\boxed{M = F\cdot d = 1{,}07\cdot 10^5\ N\cdot m}$

Π.Χ2



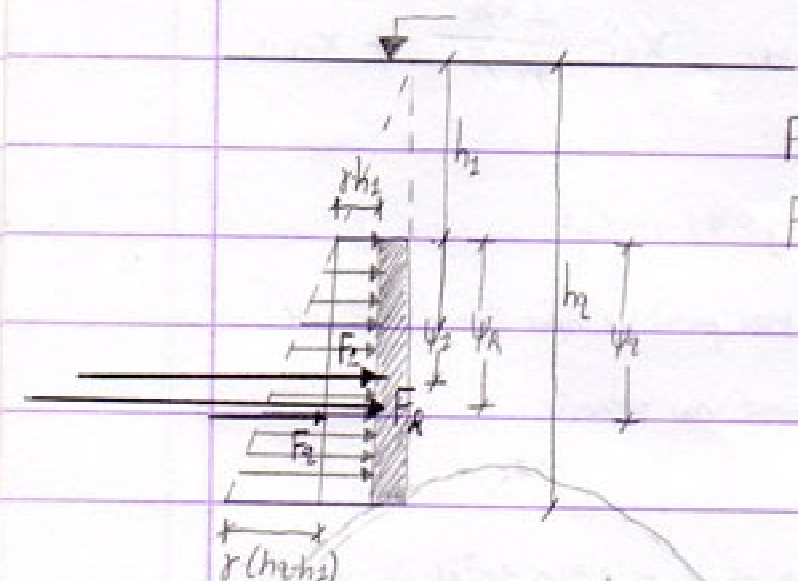


$$F = \gamma h_c A = 9{,}81 \cdot 1095 \cdot 2{,}7 \cdot \frac{0{,}9^2}{2}$$

$$\Rightarrow F = 10.995\ N$$

$$X_R = \frac{I_{x\psi_c}}{\psi_c A} + \cancel{x_c}^{\,0} = \frac{\frac{(0{,}9)^2 0{,}9}{72} \cdot 0{,}9}{2{,}7 \cdot \frac{0{,}9^2}{2}} = 0{,}0083m$$

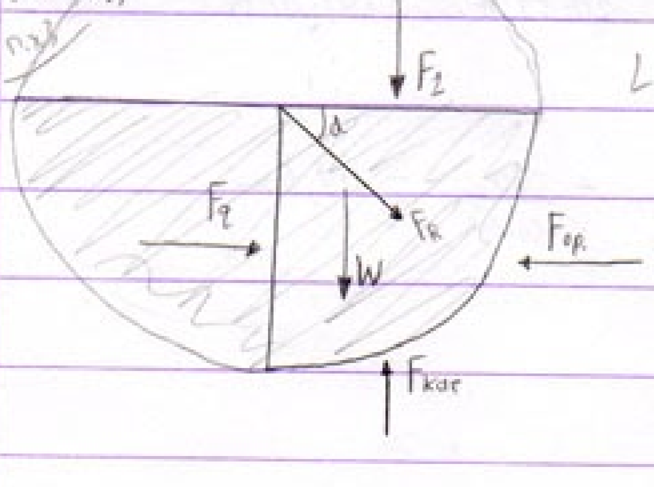
$$\psi_R = \frac{I_{x_c}}{\psi_c A} + \psi_c = \frac{\frac{0{,}9\,(0{,}9)^3}{36}}{2{,}7 \cdot \frac{0{,}9^2}{2}} + 2{,}7 = 2{,}716\ m$$



$F_R = F_1 + F_2$

$F_R \cdot \psi_R = F_1 \cdot \psi_1 + F_2 \cdot \psi_2 \Rightarrow \psi_R = \dots$

Π.Χ



$L = 1m$

$F_{op.} = F_2$

$F_{κατ.} = F_1 + W$

$\alpha = εφ^{-1}\left(\frac{F_{κατ.}}{F_{op.}}\right)$

$F_{op} = \gamma h_c A = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot \frac{0{,}9}{2} \cdot 0{,}9 \cdot 1$

$\Rightarrow F_{op} = 3973N$

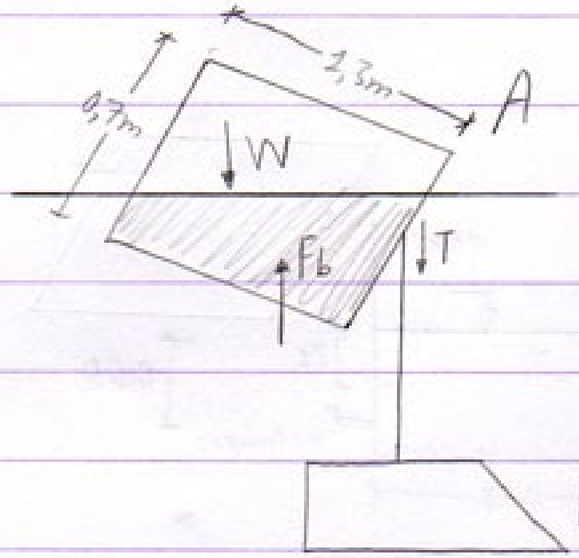
$W = \gamma V = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot \frac{\pi\, 0{,}9^2}{4} \cdot 1$

$\Rightarrow W = 6238N$

$F_R = \sqrt{W^2 + F_{op}^2}$

$\alpha = εφ^{-1}\left(\frac{W}{F_{op}}\right) = 57{,}5^\circ$

Π.χ.4



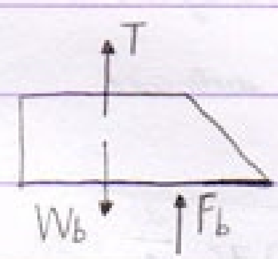
$\gamma_B = \gamma_{τσιμ.} = 23{,}6\ KN/m^3$

$V_{σωμ.} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}3\ m^3$

$B_{σωμ.} = 2{,}4 KN$

$V_B = ;$

ΛΥΣΗ



$T + F_b = W_B \Rightarrow F_b = W_B - T$

$\Rightarrow \gamma_{νερ} \cdot V_B = \gamma_B \cdot V_B - T \quad (1)$

Για το σώμα A: $T + W_A = F_{B,A} \Rightarrow T = F_{B,A} - W_A = \gamma_{νερ.} \dfrac{V_A}{2} - W_A$

$\Rightarrow T = 9{,}8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 - 2{,}4 = 0{,}72 kN \quad (2)$

$(1) \xrightarrow{(2)} V_B = 0{,}0522\, m^3$

Μεταβολή της πίεσης σε ρευστό με κίνηση στερεού σώματος

$-\dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho \cdot a_x$, $-\dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot a_y$, $-\dfrac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho \cdot a_z$

$dp = -\rho \cdot a_y \cdot dy - \rho \cdot (g + a_z) \cdot dz$

Γραμμές σταθερής πίεσης: $dp = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{a_y}{g + a_z}}$

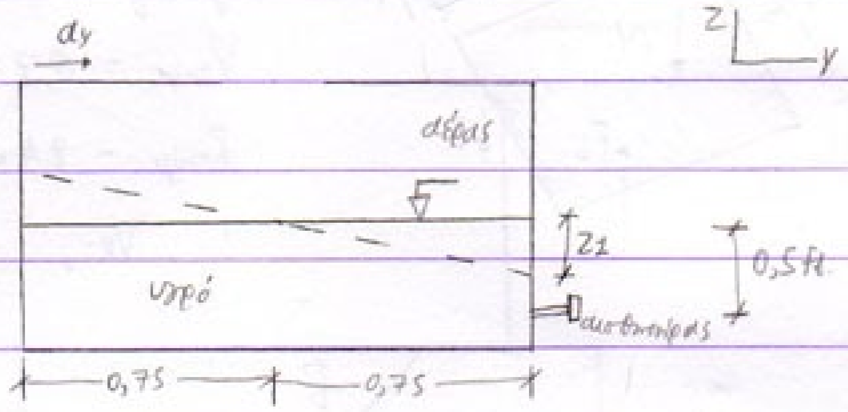
Περιστροφή στερεού σώματος

$\dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho r \cdot w^2$, $\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \Big\}\ dp = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dz}{dr} = \dfrac{r \cdot w^2}{g}}$

$\boxed{z = \dfrac{w^2 r^2}{2 \cdot g} + ct.}$

$p = \dfrac{\rho w^2 \cdot r^2}{2} - \gamma \cdot z + ct.$

π.χ.5



α) Σχέση μεταξύ επιτάχυνσης και πίεσης (για $\rho = 650\ kg/m^3$)

β) a_{ymax} για να αγγίξει η ελεύθερη επιφάνεια τον αισθητήρα.

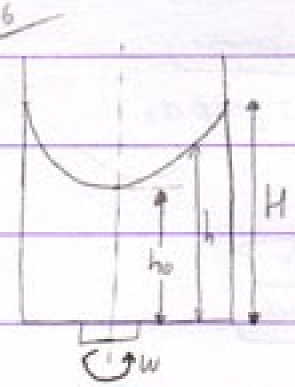
α) $\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g} \Rightarrow -\frac{z_1}{0,75} = -\frac{a_y}{g} \Rightarrow \boxed{z_1 = 0,75 \cdot \frac{a_y}{g}}$ (1)

Πίεση υδροστατική $(a_z = 0)$: $p = \gamma \cdot h \Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot (0,5 - z_1)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} p = 3188,2 - 487,5 \cdot a_y$

β) τη στιγμή εκείνη, $z_1 = 0,5$: $\frac{0,5}{0,75} = \frac{a_{ymax}}{g} \Rightarrow a_{ymax} = 6,54\ m/s^2$

π.χ.6



Λύση

$h = \frac{w^2 r^2}{2 \cdot g} + h_0$ (ελεύθερη επιφάνεια)

$V_{αρχ.} = \pi R^2 \cdot H$

$dV = 2\pi r h dr \Rightarrow V = 2\pi \int_0^R r \left(\frac{w^2 r^2}{2g} + h_0\right) dr$

$\Rightarrow V_{τελ.} = \frac{\pi \cdot w^2 \cdot R^4}{4 \cdot g} + \pi \cdot R^2 h_0$

$V_{τελ.} = V_{αρχ.}$

$\Rightarrow \boxed{H - h_0 = \frac{w^2 \cdot R^2}{4g}}$

π.χ.7

Οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις εκφράσεις:

$u = \frac{V_0 \cdot x}{l}$, $v = -\frac{V_0 \cdot \psi}{l}$. Να βρεθεί η εξίσωση των γραμμών ροής:

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\psi}{x} \Rightarrow \int \frac{d\psi}{\psi} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln\psi = \ln x$$

Ασκήσεις με εξίσωση συνέχειας:

μόνιμη ροή: $\oint_{\Sigma} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$, μη μόνιμη: $\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dw + \oint_{\Sigma} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = 0$

Ασκ.8

ρ μίγμ;

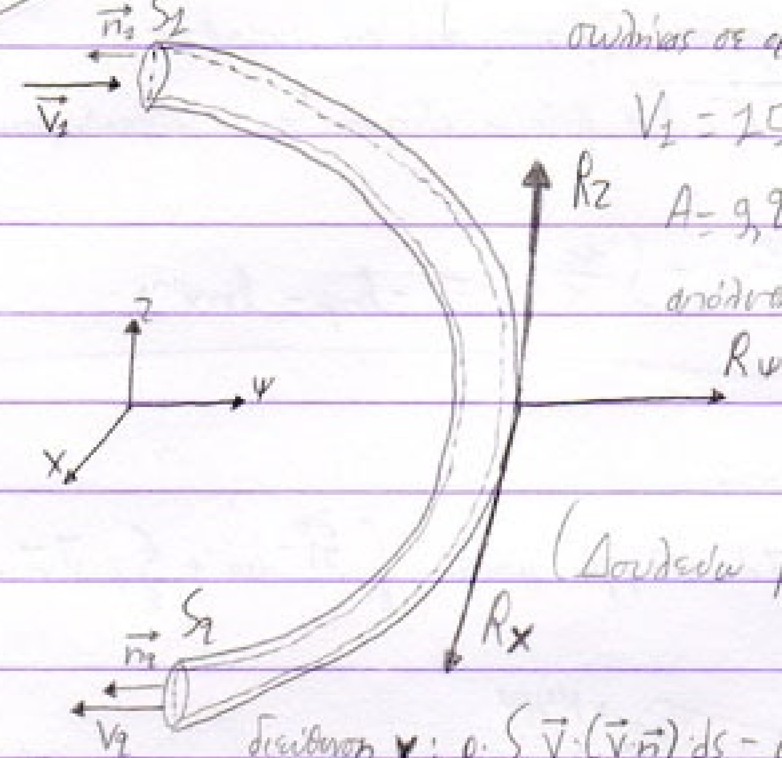
$$m_{εισ.} = m_{εξ.} \Rightarrow \rho_{μίγμ.} \cdot Q_{μίγμ.} = \rho_{νερ.} \cdot Q_{νερ.} + \rho_{αλκ.} \cdot Q_{αλκ.}$$

$$\Rightarrow \rho_{μίγμ.} = \frac{\rho_{νερ.} \cdot Q_{νερ.} + \rho_{αλκ.} \cdot Q_{αλκ.}}{Q_{νερ.} + Q_{αλκ.}}$$

Ερ.: Πώς δικαιολογώ ότι $Q_v + Q_{αλκ.} = Q_{μίγμ.}$;

Ok!

Ασκ. 9



σωλήνας σε οριζόντιο επίπεδο

$V_1 = 15\ m/sec$

$A = 9{,}2 \cdot 10^{-3}\ m^2$ εμβαδό διατομής

απόλυτη πίεση: $p_1 = 206\ KPa$

$p_2 = 165\ KPa$

(Δουλεύω με εξισώσεις ορμής)

διεύθυνση x: $\rho \cdot \int_S \vec V \cdot (\vec V \cdot \vec n) \cdot dS = \rho \cdot \int_\Omega \vec g\, dw + \int_S -p\vec n dS + \int_S T_n \vec n dS - \vec R$

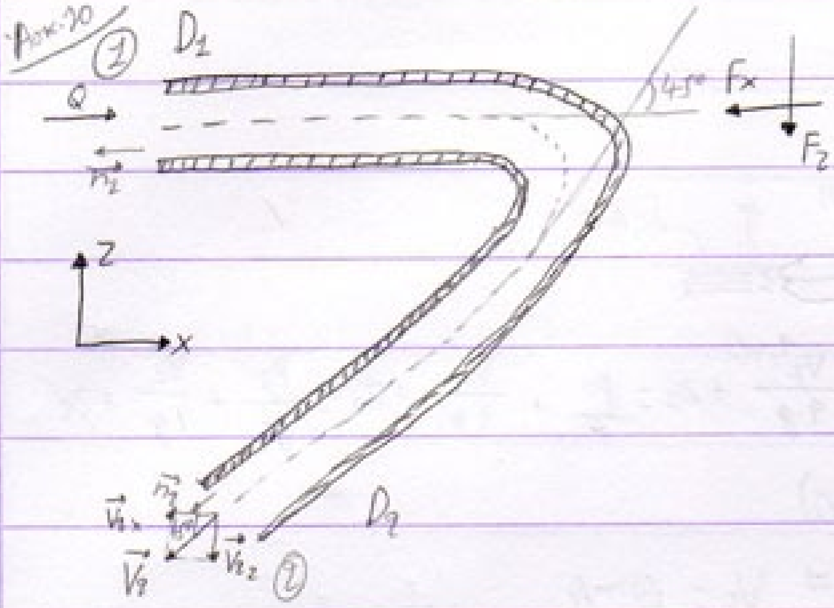
$\Rightarrow \rho \cdot \int_{S_2} \vec V_{2x} \cdot (\vec V_{2x} \cdot \vec n_2) \cdot dS = -\vec R_x \Rightarrow R_x = 0$ (ταχύτητα μόνο στον ψ)

διεύθυνση ψ: $\rho \int_{S_1} \vec V_1 (\vec V_1 \cdot \vec n_1) \cdot dS_1 + \rho \int_{S_2} \vec V_2 \cdot (\vec V_2 \cdot \vec n_2) dS_2 = \int_{S_1} -p_1 \cdot \vec n_1 dS_1 + \int_{S_2} -p_2 \vec n_2 dS_2 - \vec R_y$

$\Rightarrow -\rho V_1^2 \cdot S_1 - \rho V_2^2 \cdot S_2 = p_1 \cdot S_1 + p_2 \cdot S_2 - R_y$

$\Rightarrow R_y < 0 \rightarrow$ άρα «κλέπτει» προς την αντίθετη φορά

Ασκ. 10



$V_{νερ.} = 0,2 m^3$

$Q = 0,4\ m^3/s$

$D_1 = 400mm$

$p_1 = 150kPa$

$p_2 = 90kPa$

$D_2 = 200mm$

$m = 12kg$ $\qquad F_x, F_z = ;$

Λύση

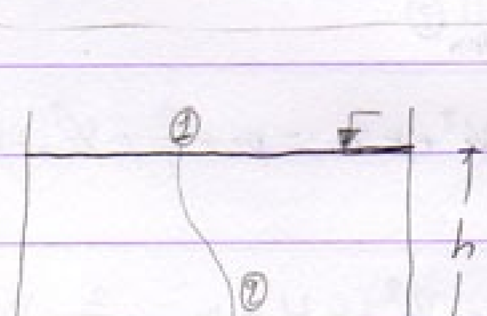
Διεύθυνση x: $\rho \cdot V_1 \cdot (-V_1 \cdot A_1) + (-V_2 \cdot \cos 45^\circ) \cdot \rho \cdot (V_2 \cdot A_2) = p_1 \cdot A_1 - F_x + p_2 \cdot A_2 \cdot \cos 45^\circ$

$\Rightarrow F_x = 25700N$

Διεύθυνση z: $(-V_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot \rho \cdot (V_2 \cdot A_2) = p_2 A_2 \cdot \sin 45^\circ - F_z \underbrace{- W_{νερού}}_{\gamma \cdot V_{νερού}} \underbrace{- W_{σωλ.}}_{mg}$ SOS!

$\Rightarrow F_z = 8990N$

Π.χ. 11



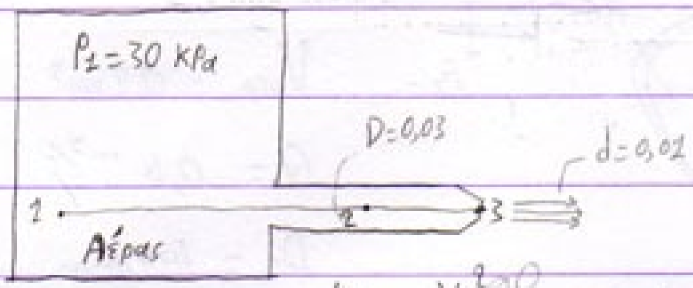
Ταχύτητα εκροής:

Bernoulli κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής.

$$\cancel{\frac{p_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{0} + z_1 = \cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{0} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

Π.χ.12



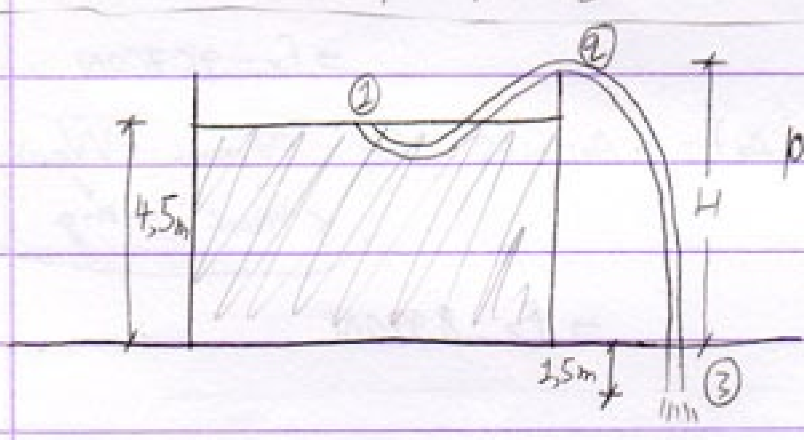
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \cancel{z_2} = \frac{\cancel{p_3}}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + \cancel{z_3}$$

(μεγάλη δεξαμενή → $V_1 = 0$)

άρα, $V_3 = \sqrt{\frac{2 p_1}{\rho}} \Rightarrow V_3 = 69\ m/s$

$$Q = A_3 \cdot V_3 = A_2 V_2 \Rightarrow V_2 = 7{,}67\ m/s$$

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2 \Rightarrow p_2 = 2963\ N/m^2$$



$p_{υδρ.\ απόλ.} = 2{,}34 \cdot 10^3\ Pa$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_1^2 + \gamma \cdot z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot z_2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_3^2 + \gamma \cdot z_3$$

$$\Rightarrow p_{1\,απ.} + \gamma \cdot z_1 = p_{2\,απόλ.} + \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2 + \gamma \cdot H = p_{3\,απ.} + \frac{1}{2} \rho V_3^2 + \gamma \cdot z_3$$

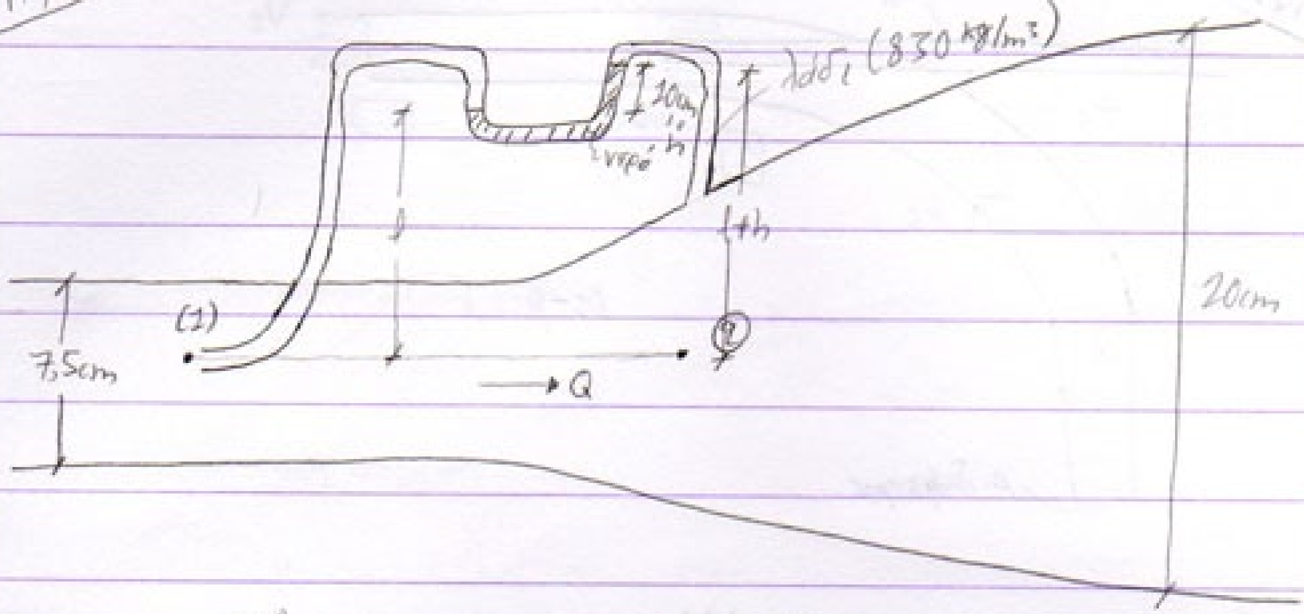
$$\Rightarrow V_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (z_1 - z_3)} \Rightarrow \boxed{V_3 = 11\ m/s}$$

$$Q_2 = Q_3 \Rightarrow V_2 = V_3$$

$$\gamma \cdot H = p_1 - p_2 + \gamma \cdot z_1 - \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2$$

$$\Rightarrow H \simeq 9m$$

π.χ. 23



$$\frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{\approx 0} + \cancel{z_1} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2}$$

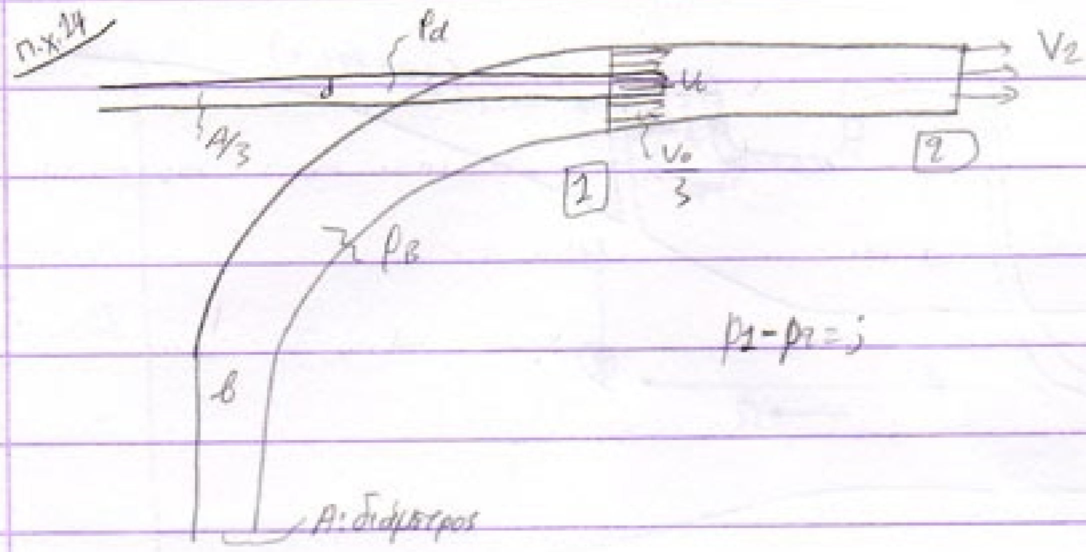
άρα, $\dfrac{V_2^2}{2 \cdot g} = \dfrac{p_1 - p_2}{\gamma}$

Μανόμετρο: $p_1 - \gamma_\lambda \cdot l - \gamma_{\nu\varepsilon\rho} \cdot h + \gamma_\lambda \cdot (l+h) = p_2$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = h(\gamma_{\nu\varepsilon\rho.} - \gamma_\lambda) > 0$

άρα, $V_2 = 0,64\ m/s$

άρα, $Q = A_2 \cdot V_2 = 5,9 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$



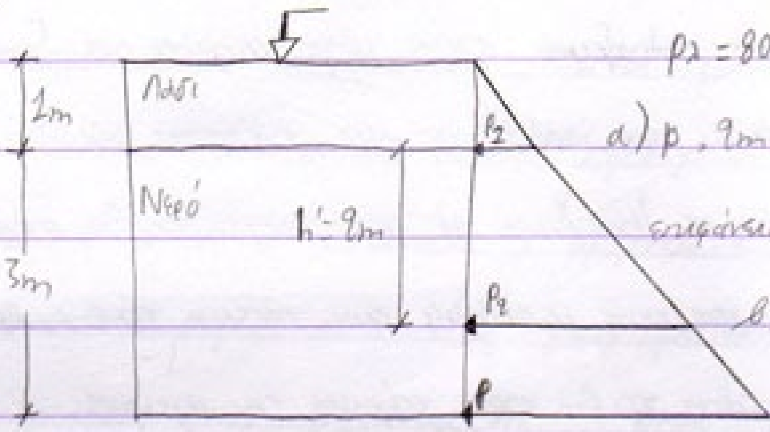
OXI BERNOULLI !!! δεν έχω σταθερή πυκνότητα κατά μήκος της ροής.

1) $V_0 \cdot \rho_a \left(-V_0 \cdot \frac{A}{3}\right) + \frac{V_0}{3} \cdot \rho_B \cdot \left(-\frac{U_0}{3} \cdot \frac{2A}{3}\right) + V_2 \cdot \rho_\mu \, (V_2 \cdot A) = p_1 A - p_2 A$

2) $U_0 \frac{A}{3} + \frac{U_0}{3} \cdot \frac{2A}{3} = V_2 A$: εξίσωση συνέχειας όγκων

3) $\rho_a V_0 \, A/3 + \rho_B \cdot \frac{V_0}{3} \cdot \frac{2A}{3} = \rho_\mu \cdot V_2 \cdot A$ · εξίσωση συνέχειας μάζας

π.χ. 25



$\rho_\lambda = 800\,kg/m^3$

α) p, 2m κάτω από τη διαχωριστική επιφάνεια

β) διάγραμμα πιέσεων

$p_1 = \rho_\lambda g h = 0{,}8 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 7{,}85\,KPa$

$p_2 = p_1 + \rho_\nu g h' = 7{,}85 + 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = 27{,}47\,KPa$

$p = p_1 + \rho_\nu \cdot g \cdot H = 7{,}85 + 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 3 = 37{,}28\,KPa$

Ασκ. 26

Ένας ευθύγραμμος τραχύς κυλινδρικός αγωγός μέσης τραχύτητας 5mm και διατομής (διαμέτρου) 25cm διαρρέεται από νερό. Η απώλεια ενέργειας για ένα μήκος 50m του αγωγού είναι ίση με 4m. Χωρίς να χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα Moody και με την υπόθεση γραμμικής μεταβολής των τάσεων τριβής, βρείτε:

α) Ποιά πρέπει να είναι η τάση τριβής στο τοίχωμα του αγωγού;

β) Με βάση την παραπάνω τιμή υπολογίστε τη μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό

γ) Ποιά η τάση τριβής σε απόσταση 3cm από τον άξονα του αγωγού;

δ) Ποιά η χρονικά μέση τοπική ταχύτητα σε απόσταση πάλι 3cm από τον άξονα του αγωγού;

ΛΥΣΗ

α) $\left.\begin{aligned} \frac{U_m}{u_*} &= 2{,}5 \cdot \ln\frac{R}{\varepsilon} + 4{,}73 \\ \frac{U_m}{u_*} &= \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \lambda = 0{,}049$

άρα, $U_m = 12{,}777 \cdot u_*$

$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{\rho \cdot V_m^2}{2} \Rightarrow \Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot V_m^2}{2} \Rightarrow \Delta p = 4 = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot (12{,}777 \cdot u_*)^2}{2}$

$\Rightarrow u_* = 0{,}247 \ m/s$

άρα, $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* \Rightarrow \boxed{\tau_0 = 161{,}985 Pa}$

β) $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot V_m^2 \Rightarrow \boxed{V_m = 3{,}27 m/s}$

γ) $\tau_y = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) \Rightarrow \tau_y = 161{,}985 \left(1 - \frac{9{,}5}{12{,}5}\right) = 38{,}7 Pa$

δ) $R = \frac{u_* \cdot \bar{\varepsilon}}{\nu} = 0{,}247 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{6} = 1235 > 70$

$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln\frac{y}{\varepsilon} + 8{,}5 \Rightarrow \bar{u} = \dots$

π.χ.17

Ένας λείος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας $R = 90cm$ διαρρέεται από νερό. Βρείτε σε ποια απόσταση από τον άξονά του η τιμή της τοπικής ταχύτητας είναι ίση με το 90% της μέσης ταχύτητας στη διατομή, στην περίπτωση α) που η ροή είναι στρωτή, β) τυρβώδης, με $\frac{\bar{u}}{U_{max}} = \left(\frac{\psi}{R}\right)^{1/7}$ και $\frac{U_{max}}{U_{μέση}} = 1,22$

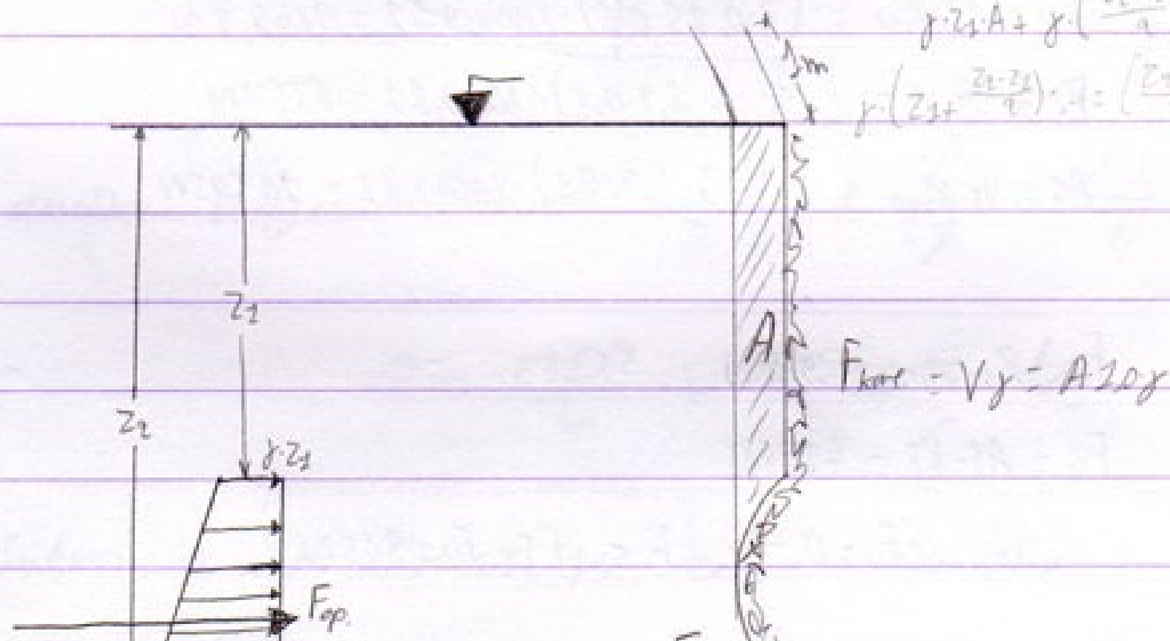
ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned} u &= 0,9\cdot u_m \\ \frac{u}{U_{max}} &= 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2 \\ u_m &= \frac{U_{max}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = 14,8cm$$

π.χ.18

$$\gamma\cdot z_1\cdot A + \gamma\cdot\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)A = \gamma\cdot\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\gamma A$$

$$\gamma\cdot\left(z_1+\frac{z_2-z_1}{2}\right)\cdot A = \left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)\gamma A$$



β) $\frac{U_{max}}{U_{μέση}} = 1,22 = \frac{U_{max}}{\bar{u}} \Rightarrow \bar{u} = \frac{U_{max}}{1,22}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{U_{max}} = \left(\frac{\psi}{R}\right)^{1/7} &\Rightarrow u = \frac{\psi^{1/7}}{R^{1/7}}\cdot U_{max} \\ u = 0,9\cdot\bar{u} &= 0,9\cdot\frac{U_{max}}{1,22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi = 0,0938m$$

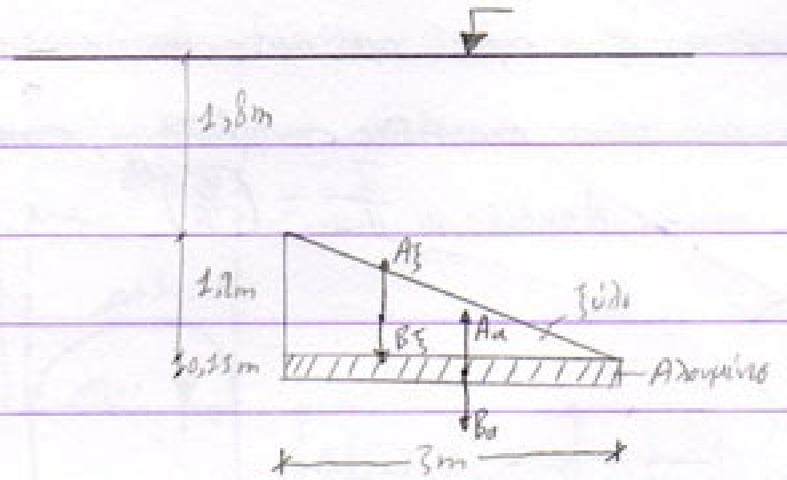
από το τοίχωμα

ή $r = R - \psi = 0,2769m$

από τον άξονα του αγωγού(;)

$1bar = 10^5 Pa$, $1Atm = 1,013 bar$

Ασκ. 19



πάχος 0,6m

$\rho_\xi = 600\ kg/m^3$

$\rho_\alpha = 2500\ kg/m^3$

ΛΥΣΗ

$B_\alpha = V_\alpha \cdot \gamma_\alpha = V_\alpha \cdot \rho_\alpha \cdot g = 3 \cdot 0,15 \cdot 0,6 \cdot 2500 \cdot 9,81 = 6622N$

$A_\alpha = V_\alpha \cdot \gamma_{νερ} = (3 \cdot 0,15 \cdot 0,6) \cdot 1000 \cdot 9,81 = 2648,7N$

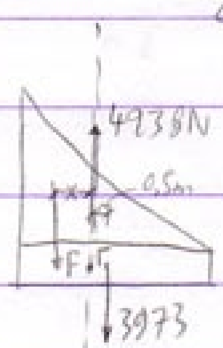
$B_\xi = V_\xi \cdot \gamma_\xi = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 0,6\right) \cdot 600 \cdot 9,81 = 6357N$

$A_\xi = V_\xi \cdot \gamma_{νερ} = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 0,6\right) \cdot 1000 \cdot 9,81 = 10.595N$

$F_\alpha = B_\alpha - A_\alpha = 3973N$

$F_\xi = A_\xi - B_\xi = 4238N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F = F_\xi - F_\alpha = 265N}$



Η F πρέπει να είναι προς τα αριστερά, γιατί αλλιώς θα ανατραπεί!!!

$\Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow F \cdot x - 3973 \cdot 0,5 = 0$

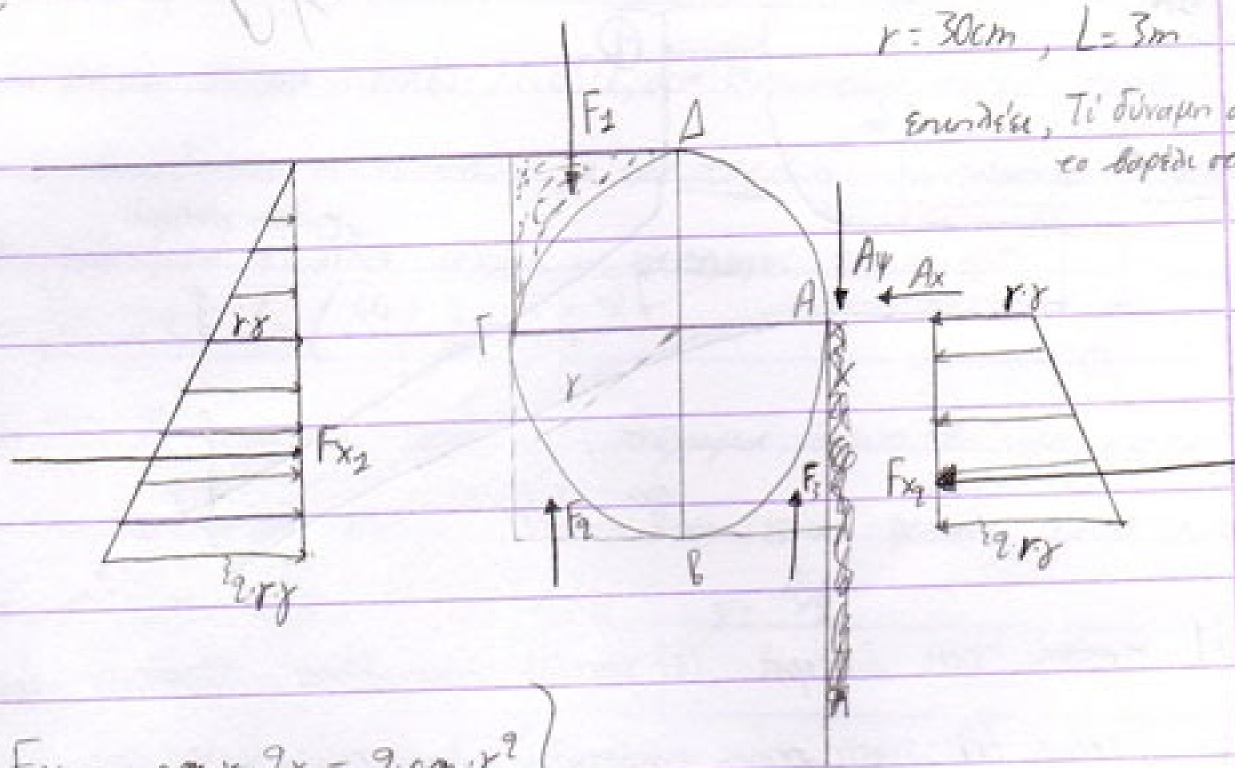
$\Rightarrow \boxed{x = 7,50m}$

Έχω ερωτήσεις!

Ασκ.20

$r = 30cm$, $L = 3m$

Επιπλέον, Τι δύναμη ασκεί το βαρέλι στο τοίχωμα;



$$F_{x_1} = \rho g \cdot r \cdot 2r = 2 \cdot \rho g \cdot r^2$$

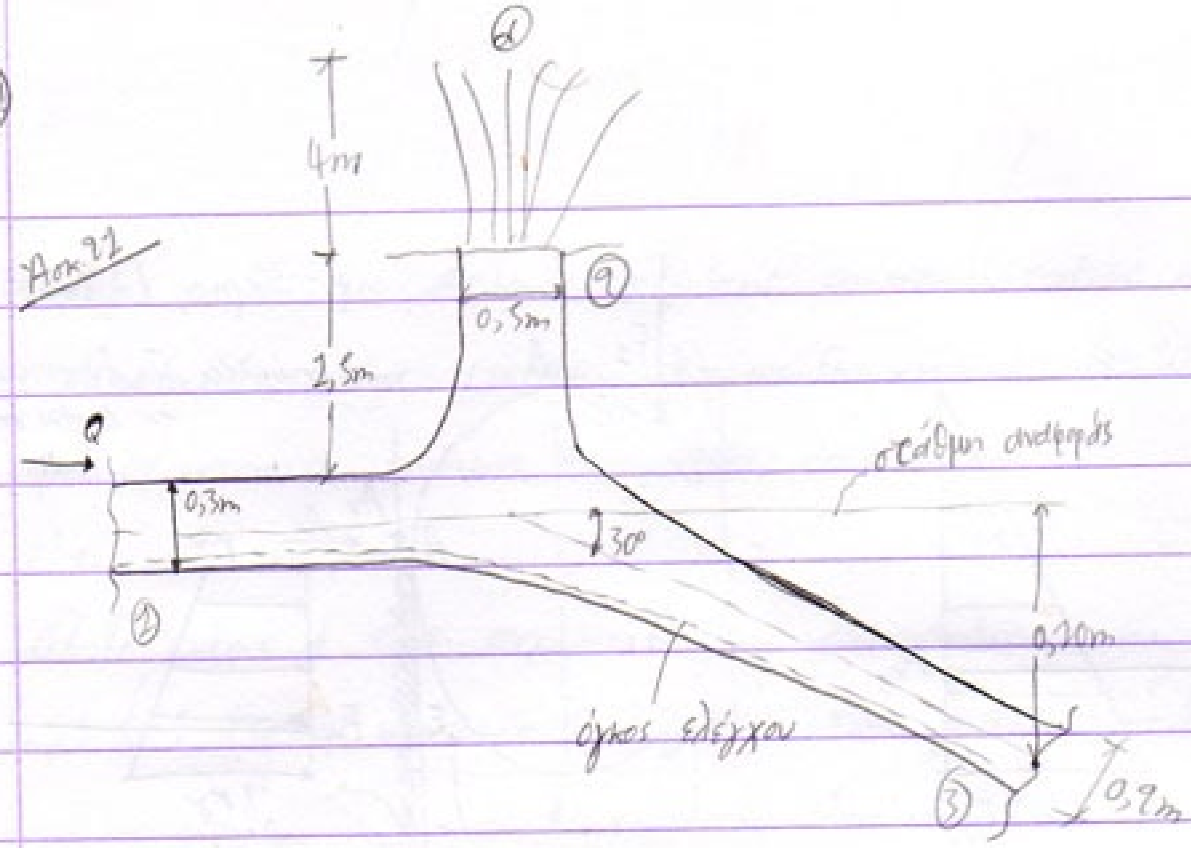
$$F_{x_2} = \rho \cdot g \cdot \frac{3}{2} \cdot r \cdot r = \frac{3}{2} \cdot \rho g r^2 \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot r^2$$

$$A_\psi = F_2 + F_3 - F_1$$

$$A_\psi = \left[\pi r^2 + \left(\frac{(2r)^2 - \pi r^2}{4}\right)\right] \cdot l \cdot \gamma$$

SOS!!!

Ασκ. 21



Η παροχή στις διατομές (2) και (3) διαμοιράζεται εξίσου. Το νερό από τη διατομή (2) εκρέει στην ατμόσφαιρα, σχηματίζοντας πίδακα. Σε περίπτωση να αγνοηθούν οι τριβές (∄ απώλειες) να υπολογιστούν: α) Η παροχή στη διατομή ① και οι πιέσεις στις διατομές ①, ② και ③. β) Η δύναμη που εξασκείται στη διακλάδωση.

ΛΥΣΗ

βασική παραδοχή: ΟΛΑ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΟΤΙ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΙΕΣΗ.

α) $Q_2 = Q_3 = Q/2$

Bernoulli $(2) \to (a)$: $H_2 = H_a \Rightarrow z_2 + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \frac{V_2^2}{2g} = z_a + \cancel{\frac{p_a}{\gamma}} + \cancel{\frac{V_a^2}{2g}}$

$\Rightarrow 2,5 + \frac{V_2^2}{2g} = 6,5 \Rightarrow \boxed{V_2 = 8,859 \ m/sec}$

$Q_2 = V_2 A_2 = 8,859 \cdot \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} = 0,1566 \ m^3/sec = Q_3$

άρα, $Q = 2Q_2 = 2Q_3 = 0,3132 \ m^3/sec$

Αν ζητεί απόλυτες πιέσεις: $p_2 = p_{atm} = 101.337 Pa$

$Q = A_1 \cdot V_1 \Rightarrow V_1 = 4,432 \ m/sec.$

Bernoulli (1)→(a)

$$\cancel{Z_1}^{0} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_a + \cancel{\frac{p_a}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{V_a^2}{2g}}^{0} \Rightarrow p_{1_{\sigma\chi\epsilon\tau}} = 44.238\ Pa$$

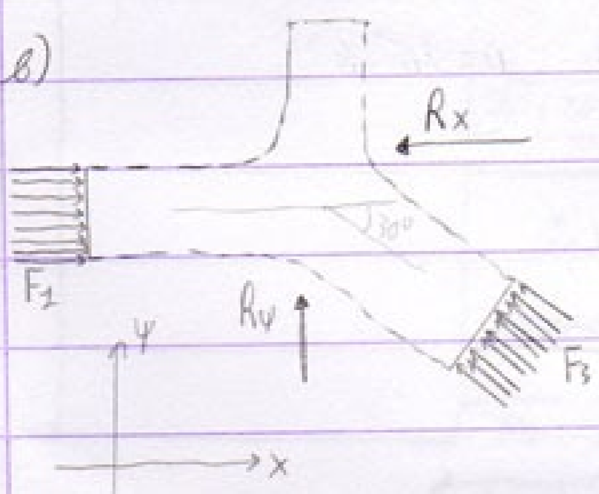
$$p_{1_{abs}} = 101337 + 44238 = 145.475\ Pa$$

Bernoulli: (1)→(3)

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow p_{3_{abs}} = 143.848\ Pa$$

$$p_{3_{\sigma\chi\epsilon\tau}} = 143848 - 101337 = 42.511\ Pa$$

β)



R_x, R_ψ (δυνάμεις από τους σωλήνες)

F_1, F_3 (συνισταμένες των πιέσεων)

άξονας x: $-\rho \cdot Q \cdot V_1 + \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot \overbrace{(V_3 \cdot \cos 30^\circ)}^{V_{3x}} + \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot 0 = F_1 - R_x - F_3 \cdot \cos 30^\circ$

$$F_1 = p_1 A_1 = 44238 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{4} = 3.120N$$

$$F_3 = p_3 \cdot A_3 = 42511 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4} = 1336N$$

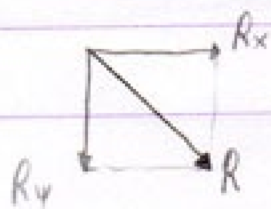
άρα, $1.000 \cdot 0{,}3132 \cdot \left(-4{,}431 + \frac{4{,}985 \cdot \cos 30^\circ}{2}\right) = 3.120 - 1336 \cdot \cos 30 - R_x$

$\Rightarrow R_x = 2675\ N$, άρα το ρευστό ασκεί δύναμη 2675N προς τα δεξιά.

άξονας y: $+\rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot V_2 + \rho \cdot \frac{Q}{2} \cdot (-V_3 \cdot \sin 30^\circ) = R_\psi + F_3 \cdot \sin 30^\circ$

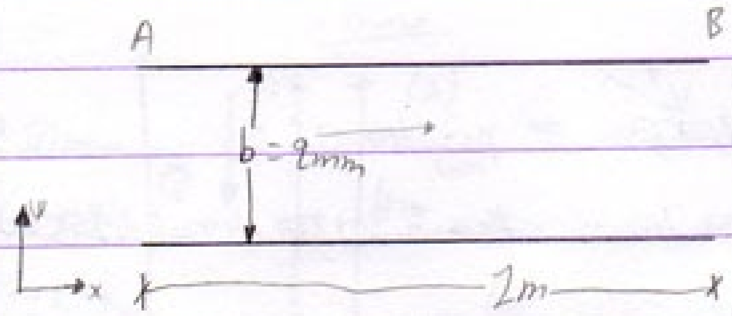
$$\Rightarrow R_\psi = 328{,}99N$$

άρα,



$$R = \sqrt{R_\psi^2 + R_x^2}$$

SOS!!!



Η ταχύτητα του ρευστού που κινείται μεταξύ 2 παράλληλων πλακών με στρωτή ροή δίνεται από τη σχέση: $u = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot \psi \cdot (b-\psi)$

Αν η διαφορά πιεζομετρικού φορτίου μεταξύ A και B είναι 1m, να υπολογιστούν: α) Η τιμή της στροβιλότητας του ρευστού που εφάπτεται σε κάθε πλάκα. β) Η δύναμη που εξασκείται σε κάθε πλάκα ανά μονάδα πλάτους. $\rho = 1.000\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa \cdot s$

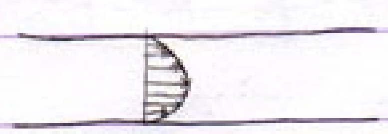
<u>ΛΥΣΗ</u>

SOS

Ελέγχω αν κινούνται οι πλάκες:

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= -\frac{dp}{dx}\frac{1}{2\mu}\cdot 0\,(b-0) = 0 \\ u(b) &= \dots = 0 \end{aligned}\right\} \underline{\text{ακίνητες}}$$

Άρα, η γραφική παράσταση ταχυτήτων είναι:



κίνηση από το A στο B

$\underline{p_A > p_B}$

Διαφορά πιεζομετρικού φορτίου = 1m

$$\Rightarrow z_A + \frac{p_A}{\gamma} - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma}\right) = 1 \xrightarrow{z_A = z_B} p_A - p_B = \gamma \Rightarrow p_B - p_A = -\gamma$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_B - p_A}{L} = \frac{-\gamma}{L} = -9.810$$

άρα, $u = -\frac{dp}{dx}\cdot\frac{1}{2\mu}\cdot y\cdot(b-y) = -(-9810)\cdot\frac{1}{2\cdot 10^{-3}}\cdot y\cdot(0{,}002-y)$

$\Rightarrow u = 9810\cdot y - 4905000\cdot y^2$

$\vec{V} = (u,0,0) = (9810y - 4905000\cdot y^2, 0, 0)$

Ο τύπος που μας δίνει τον στροβιλισμό, είναι ο εξής:

$rot\vec{V} = \left(\underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}}_{0}, \frac{\partial u}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{0}, \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{0} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

αλλά εδώ το $\frac{\partial u}{\partial z}$ της θεωρίας, είναι το $\frac{\partial u}{\partial y}$ στην άσκηση αυτή.

άρα, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ και

$rot\vec{V} = \left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

!

$\frac{\partial u}{\partial y} = 9810 - 2\cdot 4905000\cdot y = 9810 - 9810\cdot 10^3\cdot y$

άρα, $rot\vec{V} = (0, 0, 9810\cdot 10^3 y - 9810)$

$rot\vec{V}\Big|_{\text{κάτω πλάκας}} = (0, 0, -9810)$

τιμή $= |rot\vec{V}| = \sqrt{0^2+0^2+(-9810)^2} = 9810$

$rot\vec{V}\Big|_{\text{πάνω πλάκας}} = (0, 0, 9810\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^{-3} - 9810) = (0,0,9810)$

$|rot\vec{V}| = 9810$

$\tau = \mu\cdot\frac{du}{dy} = 10^{-3}(9810 - 9810\cdot 10^3\cdot y) = 9{,}81 - 9810\cdot y$

$\tau_{\text{κάτω πλάκας}} \overset{y=0}{=\!=} 9{,}81\ N/m^2$

$\tau_{\text{πάνω πλάκας}} \overset{b=2mm}{=\!=} -9{,}81\ N/m^2$

$F = \tau\cdot B\cdot L = 9{,}81\cdot 1\cdot 1 = 9{,}81N$

SOS

Ένας λείος οριζόντιος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R=6cm διαρρέεται από νερό δυναμικού ιξώδους $\mu = 1,59 \cdot 10^{-3}$ Pa με μια παροχή Q=600 lt/h.

α) Ποια η απώλεια φορτίου ανά μονάδα μήκους και ποια όταν η παροχή 10πλασιαστεί; Αν υποθέσουμε ότι μεταξύ της απώλειας φορτίου και της ταχύτητας ισχύει μια αναλογία της μορφής $h_f \sim U^a$ να το a και στις 2 περιπτώσεις.

β) Υπολογίστε την τ_0 για μήκος l=200m και στις δύο περιπτώσεις. Επαληθεύστε τις τιμές παίρνοντας άλλη έκφραση για το τ_0.

γ) Ποιά η ταχύτητα στο κέντρο του αγωγού; Συμπέρασμα για U/U_{max}.

δ) Πάχος στρωτής υποστιβάδας.

ε) Αν ο αγωγός ήταν τραχύς, ποιές σχέσεις θα άλλαζαν; Αν δεν ήταν οριζόντιος,

ΛΥΣΗ

SOS!!!

α) Ελέγχω αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης:

$$Q = 600\ lt/h = 600 \cdot \frac{10^{-3}}{3.600}\ m^3/sec = 1,667 \cdot 10^{-4}\ m^3/sec$$

$$V_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = 0,0147\ m/sec$$

$$Re = \frac{V_m \cdot D}{\nu} = 1161 < 2000 \rightarrow \text{στρωτή ροή}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = 0,0551$$

$$H_F = \frac{\lambda \cdot L \cdot V_m^2}{D \cdot 2g} \Rightarrow \frac{H_F}{L} = \frac{\lambda \cdot V_m^2}{D \cdot 2g} = 5,057 \cdot 10^{-6}\ m/m$$

$$\frac{H_F}{L} = \frac{\lambda \cdot V_m^2}{D \cdot 2g} \rightarrow \frac{H_F}{L} = \frac{64\, V_m^2}{Re \cdot D\, 2g} = \frac{64 \cdot V_m \cdot \nu}{D^2 \cdot 2g} = \frac{64 \cdot \nu}{D^2 \cdot 2g} \cdot V_m \rightarrow \boxed{a=1}$$

Δεκαπλασιάζω την παροχή: $Q = 1,667 \cdot 10^{-3}\ m^3/sec.$

$V_m = 0,147\ m/sec.$

$Re = 1161074000 \rightarrow$ τυρβώδης ροή

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,01 \cdot \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

αφού, όμως, $Re < 10^5$, μπορώ να πάρω: $\lambda = 0,316 \cdot Re^{-1/4} \Rightarrow \lambda = 0,0305$

$$\frac{H_F}{L} = \frac{\lambda}{D}\,\frac{V_m^2}{2g} = \frac{0,0305 \cdot 0,147^2}{0,29 \cdot 2 \cdot 9,81} = 1,799 \cdot 10^{-4}\ m/m$$

$$\frac{1,799 \cdot 10^{-4}}{5,057 \cdot 10^{-6}} = 55,3$$ φορές περισσότερες απώλειες στην τυρβώδη

Στην τυρβώδη ροή: $\lambda = 0,316\, Re^{-1/4}$

$$H_F = \lambda \frac{L}{D}\frac{V_m^2}{2g} = 0,316 \cdot \left(\frac{V_m \cdot D}{\nu}\right)^{-1/4} \cdot \frac{L}{D}\frac{V_m^2}{2g} = C \cdot V_m^{7/4} \rightarrow a = 7/4$$

β) στρωτή ροή: $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot V_m^2 = \frac{0,0551}{8}\, 1000 \cdot 0,0147^2 = 1,488 \cdot 10^{-3} Pa$

Εμβαδό παράπλευρης: $A_{παράπλ.} = 2\pi R \cdot L$

$F_{τρ.} = \tau_0\, A_{παράπλ.} = \tau_0\,(2\pi R \cdot L)$

$W_{τρ.} = F_{τρ.} \cdot S = \tau_0\, 2\pi R \cdot L \Rightarrow \frac{W_{τρ.}}{L} = \tau_0 \cdot 2\pi R$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{W_{τρ.}}{m \cdot g} = \frac{H_F}{L} \Rightarrow \frac{\tau_0\, 2\pi R}{m \cdot g} = \frac{H_F}{L} \\ m = V \cdot g = \pi R^2 1 \cdot \rho \end{array}\right\} \tau_0 = 1,488 \cdot 10^{-3}\ Pa$$

γ) Στο κέντρο του αγωγού έχουμε $U = U_{max}$.

$$U_{max} = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \cdot \mu \cdot L} \cdot R^2 = \frac{\sigma \cdot R^2}{4 \cdot \mu}$$

όπου $\sigma = -\frac{dp}{dx}$

$$\frac{H_F}{L} = 5{,}057 \cdot 10^{-6}$$

$$-\frac{\Delta p}{\gamma} = H_F \Rightarrow H_F = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \Rightarrow \frac{-\Delta p}{\gamma \cdot L} = \frac{H_F}{L}$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta p}{L} = \frac{H_F}{L} \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow \sigma = 5{,}057 \cdot 10^{-6} \cdot 1.000 \cdot 9{,}81 = 0{,}0496$$

άρα, $V_{max} = \frac{0{,}0496 \cdot 0{,}08^2}{4 \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-3}} = 0{,}0494 \, m/sec.$

και $\frac{V_m}{V_{max}} = \frac{0{,}0247}{0{,}0494} = 0{,}5$

SOS!!!!!!

τυρβώδης

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot V_m^2 = \frac{0{,}0305}{8} \cdot 1.000 \cdot 0{,}147^2 = 0{,}0824$$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{0{,}0824}{1.000}} = 9{,}077 \cdot 10^{-3}$$

$\frac{U^* R}{\nu} = 358{,}30$ άρα ισχύει τον τύπο:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln \frac{u_* \cdot y}{\nu} + 5{,}5$$

$$\Rightarrow U_{max} = 9{,}077 \cdot 10^{-3} \left(2{,}5 \cdot \ln(358{,}3) + 5{,}5\right) = 0{,}183 \, m/sec.$$

SOSARA!

δ) $\frac{u_* \cdot \delta_1}{\nu} \simeq 5 \Rightarrow \delta_1 = \frac{1{,}59 \cdot 10^{-6} \cdot 5}{9{,}077 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \delta_1 = 0{,}8573 \cdot 10^{-3} m$

ε) Για τραχείς αγωγούς συμπληρώνω και το ε.

Άσκηση

Μέσα σ' ένα λείο οριζόντιο κυλινδρικό αγωγό σε θερμοκρασία 15°C μελετάμε τη ροή αέρα πυκνότητας $\rho = 1{,}23\ kg/m^3$ και $\nu = 14{,}5 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$. Για ένα μήκος $L = 90m$ μετρήθηκε η πτώση πίεσης (Δp) για 4 διαφορετικές μέσες ταχύτητες ($\bar{u}$).

Δp (Pa)	250	75	30	15
$\bar{u}$ (m/s)	20	5	3	2

Μπορείτε να καταλάβετε αν η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

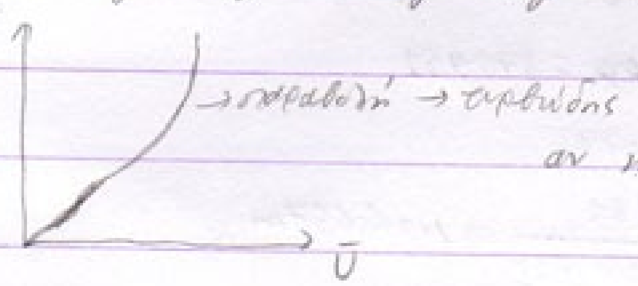
① Για τα δεδομένα μιας από τις μετρήσεις (π.χ. αυτής με $\bar{u} = 5\ m/s$): a) Ποια η έκφραση υπολογισμού του λ (συντελεστής απωλειών) που θα χρησιμοποιήσετε και γιατί; β) Βρείτε τη διάμετρο του αγωγού, γ) Υπολογίστε την ταχύτητα στον άξονα.

ΛΥΣΗ

Δεν μπορούμε να απαντήσουμε με Re, γιατί $Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$ → άγνωστο

Έτσι: $H_1 = H_2 + H_F$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\bar{U}_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\bar{U}_2^2}{2g} + H_F \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H_F \Rightarrow H_F = \frac{|\Delta p|}{\gamma}$$



αν ήταν στρωτή, θα έβγαινε ευθεία.

ΣΩΣΤΑ

πώς;

a) $Re = \frac{\bar{V} \cdot D}{\nu} = 344828D$ με $\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8}$

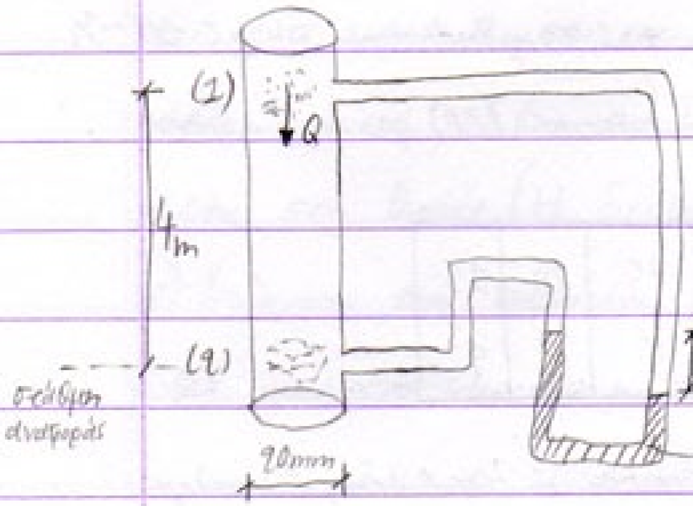
$$\frac{\Delta p}{L} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot V_m^2}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{D} = 0{,}244$$

β) $\frac{1}{\sqrt{0{,}244 \cdot D}} = 2 \cdot \log(Re\sqrt{0{,}244D}) - 0{,}8$ δοκιμές:

D	Αριστερά	Δεξιά
0,20m	6,402	6,095

γιατί;

505



Λάδι πυκνότητας $\rho = 870\ kg/m^3$
κινηματικού ιξώδους $\nu = 1,2 \cdot 10^{-4}\ m^2/s$
ρέει στον κάθετο σωλήνα με ρυθμό
(δηλ. Q) $4 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$

τα επάνω σημεία έχουν μεγαλύτερη πίεση.

$\rho_{man} = 1300\ kg/m^3$

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0,01^2} = 1,273\ m/sec.$$

$$Re = \frac{V_m \cdot D}{\nu} = 212,17 < 2.000 \rightarrow \text{άρα στρωτή ροή}$$

άρα, έχω στρωτή ροή σε κυλινδρικό αγωγό:

$$\lambda \cdot Re = 64 \Rightarrow \lambda = \frac{64}{212,17} = 0,3016$$

Απώλειες υδραυλικού φορτίου: $H_F = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V_m^2}{2 \cdot g} = 4,982m$

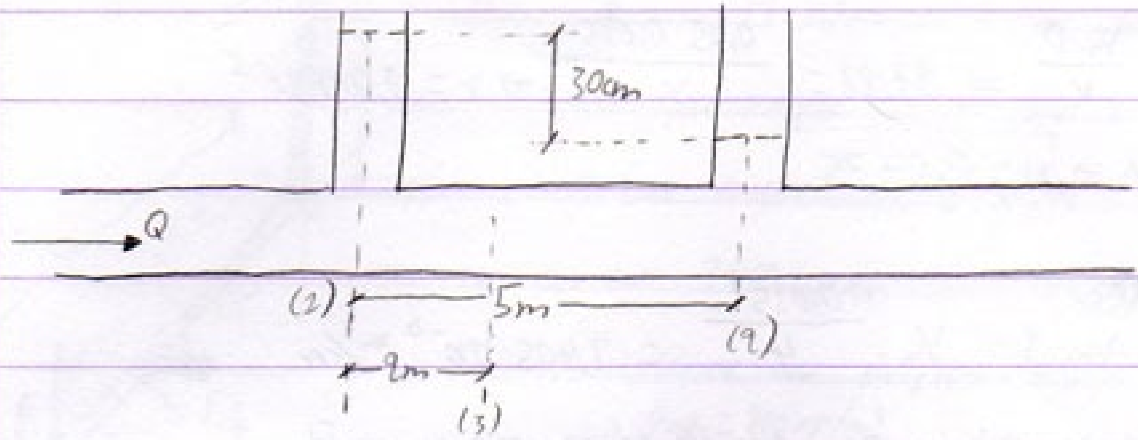
Bernoulli (1) → (2)

$$H_1 = H_2 + H_F \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + 4,982$$

$\Rightarrow p_1 - p_2 = 0,982 \cdot \gamma$, όπου $\gamma = \rho \cdot g = 870 \cdot 9,81$

άρα, $p_1 - p_2 = 0,982 \cdot 870 \cdot 9,81 = 8381\ Pa$

και $\Delta p = h \cdot \rho_{man} \cdot g \Rightarrow h = \frac{8381}{1300 \cdot 9,81} \Rightarrow h = 0,657m$



Έχουμε λάδι πυκνότητας $\rho = 860 kg/m^3$ που διαρρέει έναν αγωγό διαμέτρου $D = 3{,}5cm$ με μια μέγιστη ταχύτητα $U_{max} = 0{,}5\ m/sec$. α) Ποιό το δυναμικό ιξώδες; β) Ποια η παροχή και ποια η ταχύτητα στο τοίχωμα και σε απόσταση 1cm από αυτό; γ) Υπολόγισε το λ και τις απώλειες φορτίου για το μήκος των 5m. δ) Ποια η πτώση πίεσης 2m μετά το 1ο πιεζόμετρο; ε) Υπολόγισε την τάση τριβής στο τοίχωμα στ) Ποια η συνολική δύναμη τριβής στο μήκος των 5m;

SOS!!

ΛΥΣΗ

Έστω ροή στρωτή ($U_{max} <<$, αλλά δεν μπορούμε ακόμη να το αποδείξουμε).

$\lambda \cdot Re = 64$

$u_m = \frac{U_{max}}{2} = 0{,}25\ m/sec.$

Bernoulli (1)→(2): $H_1 = H_2 + H_F \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + H_F$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow H_F = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \\ \text{Ξέρουμε: } p_1 - p_2 = \gamma \cdot 0{,}30 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{H_F = 0{,}30m}$

$H_F = \lambda \frac{L}{D} \frac{V_m^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \lambda = 0{,}659$

$Re = \frac{64}{\lambda} \Rightarrow Re = 97{,}12 < 2000 \rightarrow$ άρα η ροή είναι ΣΤΡΩΤΗ

συνέχεια →

α) $Re = \frac{V_m \cdot D}{\nu} \Rightarrow 97,12 = \frac{0,25 \cdot 0,035}{\nu} \Rightarrow \nu = 9,009 \cdot 10^{-5}$

$\mu = \nu \cdot \rho \Rightarrow \boxed{\mu = 0,0775}$

β) $Q = V_m \cdot S = V_m \frac{\pi \cdot 0,035^2}{4} = 2,405 \cdot 10^{-4}\ m^3/sec.$

Η ταχύτητα πάνω στο τοίχωμα είναι πάντα μηδέν.

Σε απόσταση 2cm από το τοίχωμα: $\frac{u}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$

$R = 0,0275m$ και $r = 0,0275 - 0,02 = 0,0075m$

άρα, $\frac{U}{0,5} = 1 - \left(\frac{0,0075}{0,0275}\right)^2 \Rightarrow \boxed{U = 0,408\ m/s}$

γ) Ήδη τα υπολογίσαμε.

δ) Bernoulli $(2) \rightarrow (3)$

$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2 \cdot g} + H_{F(2\rightarrow3)}$

, όπου $H_{F_{2\rightarrow3}} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V_m^2}{2 \cdot g} = 0,659 \cdot \frac{2}{0,035} \cdot \frac{0,25^2}{2 \cdot 9,81} = 0,120m$

άρα, $\frac{p_2 - p_3}{\gamma} = 0,12 \Rightarrow \boxed{p_2 - p_3 = 1012\ Pa}$

ωραίο!

ε) $\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot V_m^2$ (;)

στ) $F = \tau_0 \cdot A = \tau_0 \cdot 2\pi R L = \tau_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,0275 \cdot 5$

$1 bar = 10^{-5} Pa$

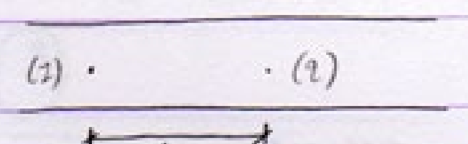
Ένα ρευστό πυκνότητας $\rho = 990\ kg/m^3$ και κιν. ιξώδους $\nu = 4,2 \cdot 10^{-4}\ m^2/s$ κυκλοφορεί μέσα σε λείο οριζόντιο κυλινδρικό αγωγό $D = 12cm$. Σε απόσταση $2cm$ από το τοίχωμα βρέθηκε μία ταχύτητα $0,6\ m/s$. α) Ποιες ενδείξεις έχετε για να θεωρήσετε τη ροή στρωτή ή τυρβώδη;

ΟΡΑΖΟ!

β) Πόσο μήκος χρειάζεται για να πέσει η πίεση 3 bar; γ) Ποια ενέργεια χάνεται στη μονάδα βάρους του ρευστού στο παραπάνω μήκος;
δ) Θέλουμε να υπολογίσουμε την τάση τριβής στο τοίχωμα. Ποιά από τις δύο εκφράσεις θα χρησιμοποιούσατε; $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dy}$, $\tau = -\mu \cdot \frac{du}{dr}$
Υπολογίστε την τάση τριβής στο τοίχωμα, τ_0.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $Re = \frac{U_m \cdot D}{\nu} = \frac{0,6 \cdot 0,12}{4,2 \cdot 10^{-4}} = 171,4 <<< 2.000 \rightarrow$ στρωτή ροή

β) 

$$H_1 = H_2 + H_{F(1\rightarrow2)}$$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + H_{F(1\rightarrow2)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H_{F(1\rightarrow2)} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V_m^2}{2g} \\ &\lambda = \frac{64}{Re} \\ &p_1 - p_2 = 3 \cdot 10^{-5} Pa \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot 10^{+5}}{990 \cdot 9,81} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{0,12} \cdot \frac{V_m^2}{2 \cdot 9,81}$$

στρωτή ροή: $\frac{u}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Rightarrow \frac{0,6}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{0,04}{0,06}\right)^2 \Rightarrow U_{max} = 1,080\ m/sec$

$$U_m = \frac{U_{max}}{2} = 0,54\ m/sec.$$

$$Re = \frac{0,54 \cdot 0,12}{4,2 \cdot 10^{-4}} = 154,3$$

άρα, $\underline{L = 647,05m}$

$\longrightarrow$

$$\tau_0 = \frac{\cancel{64}\,8}{1543}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}\cdot 990\cdot 0{,}54^2 =$$

γ) $\frac{E_{μηχ.}}{Βάρος}$ = υδραυλικό φορτίο $= \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{3\cdot 10^5}{990\cdot 9{,}81} = 33{,}94$

δ) $\tau = -\mu \cdot \frac{du_r}{dr}$

$\frac{u_r}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$, $u_{max} = 1{,}08\ m/sec$, $R = 0{,}06\ m$

άρα, η ταχύτητα στην τυχαία θέση, είναι:

$\frac{u}{1{,}08} = 1 - \left(\frac{r}{0{,}06}\right)^2 \Rightarrow u = 1{,}08\cdot\left[1 - \left(\frac{r}{0{,}06}\right)^2\right]$

$\frac{du_r}{dr} = 1{,}08\cdot\left[-2\cdot\frac{r}{0{,}06}\cdot\frac{1}{0{,}06}\right]$ και $\left.\begin{array}{l} \nu = 4{,}2\cdot 10^{-4} \\ \rho = 990\ kg/m^3 \end{array}\right\}\ \nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \mu = 0{,}3964$

$\tau = -\mu\cdot\frac{du_r}{dr}$! άρα, η τάση τριβής στο τοίχωμα είναι:

$$\tau_0 = \tau\Big|_{r=R=0{,}06} = -0{,}3964\cdot 1{,}08\left[-2\cdot\frac{0{,}06}{0{,}06}\cdot\frac{1}{0{,}06}\right] = \boxed{13{,}92\ Pa}$$

SOS ΠΡΩΙΝΟΣ

ΔΙΝΕΙ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ

Νερό θερμοκρασίας 80°C ρέει σε οριζόντιο σωλήνα, διαμέτρου D=120mm.
a) Αν η πτώση πίεσης στο σωλήνα είναι 2KPa ανά 10m σωλήνα, ποια η max επιτρεπόμενη ταχύτητα στο σωλήνα για να θεωρηθεί λείος;
β) Υπολογίστε την ταχύτητα ροής σε χαρακτηριστικές αποστάσεις από το τοίχωμα και σχεδιάστε την κατανομή της ταχύτητας. γ) Υπολογίστε την ταχύτητα ροής σε απόσταση 10mm από το τοίχωμα στην περίπτωση που: i) ο σωλήνας είναι λείος
ii) η τραχύτητα του σωλήνα είναι 10 φορές μεγαλύτερη απ' του (α).

ΛΥΣΗ

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{2.000\,Pa}{10} = 200\ Pa/m$$

οριζόντιος αγωγός: $\tau_0 = \frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{D}{4} = 200 \cdot \frac{0,120}{4} = 6Pa$

λείοι σωλήνες: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\cdot\log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (2)$

$(1)\ \frac{\Delta P}{L} = \lambda\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{\rho\cdot v^2}{2}$ ↳ ισχύει σε όλους τους αγωγούς

$Re = \frac{V_m\cdot D}{\nu}$

σελ.561: στους 80°C έχουμε: $\rho=971,8\ kg/m^3$, $\nu=0,364\cdot10^{-6}$ και $\mu=0,354\cdot10^{-3}$

ισχύει πάντα: $\frac{u^*\cdot\delta}{\nu}\cong 6$, $u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{6}{971,8}} = 0,0786$

άρα, $\frac{0,0786\cdot\delta}{0,364\cdot10^{-6}} = 6 \Rightarrow \delta = 0,02779mm$

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2): $200 = \lambda\cdot\frac{1}{0,12}\cdot\frac{971,8\cdot v^2}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,0494v^{-2}}$

και: $\frac{1}{\sqrt{0,0494\cdot v^{-2}}} = 2\cdot\log\left(\frac{v\cdot0,12}{0,364\cdot10^{-6}}\cdot\sqrt{0,0494\cdot v^{-2}}\right) - 0,8$

$\Rightarrow \boxed{v = 1,982\ m/s}$

συνέχεια →

$$Re = \frac{V_m \cdot D}{\nu} = \frac{1,982 \cdot 0,12}{0,364 \cdot 10^{-6}} = 653407 \rightarrow \text{τυρβώδης ροή}$$

Πρέπει να φτιάξουμε 2 τύπους. Έναν για την ταχύτητα στην κεντρική τυρβώδη ροή και έναν για την ταχύτητα στη στρωτή στοιβάδα στο τοίχωμα.

$\psi_+ = \frac{U^* \cdot \psi}{\nu} = 215934 \cdot \psi$

$\psi_+ < 5$: είμαστε στη στρωτή οριακή στοιβάδα

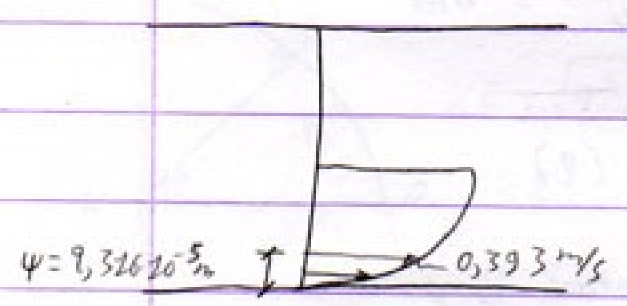
άρα, $215934\psi < 5 \Rightarrow \psi < 2,316 \cdot 10^{-5} m$

Παρατηρούμε μια απόκλιση ανάμεσα σε ψ και δ.

Το ακριβές είναι το ψ. (Το δ το βρίσκω με προσεγγιστικό τύπο.)

Η ταχύτητα στη στρωτή στοιβάδα είναι:

$\bar{U}_x = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot \psi = \frac{6}{0,354 \cdot 10^{-3}} \psi = 16949\psi$



$16949 \cdot 2,316 \cdot 10^{-5}$ m/sec. (η max)

Τελειώσαμε με τη στρωτή στοιβάδα.

$\psi_+ > 30$: $U_+ = 5,75 \cdot \log \psi_+ + 5,5$

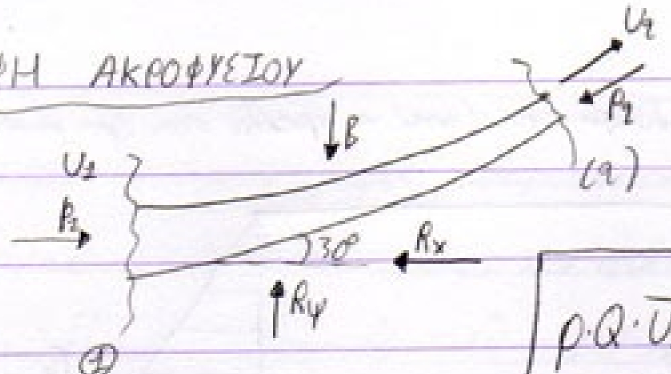
$\psi_+ > 30 \Rightarrow 215934\psi > 30 \Rightarrow \psi > 1,389 \cdot 10^{-4}$

Το ενδιάμεσο στάδιο των 2ψ είναι μεταβατικό. Εκεί δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή.

Κάνουμε έναν πίνακα:

ψ	ψ_+	U_+	$\bar{U}_x$
$1,389 \cdot 10^{-4}$			
0,060			

ΣΤΡΟΦΗ ΑΚΡΟΦΥΣΙΟΥ

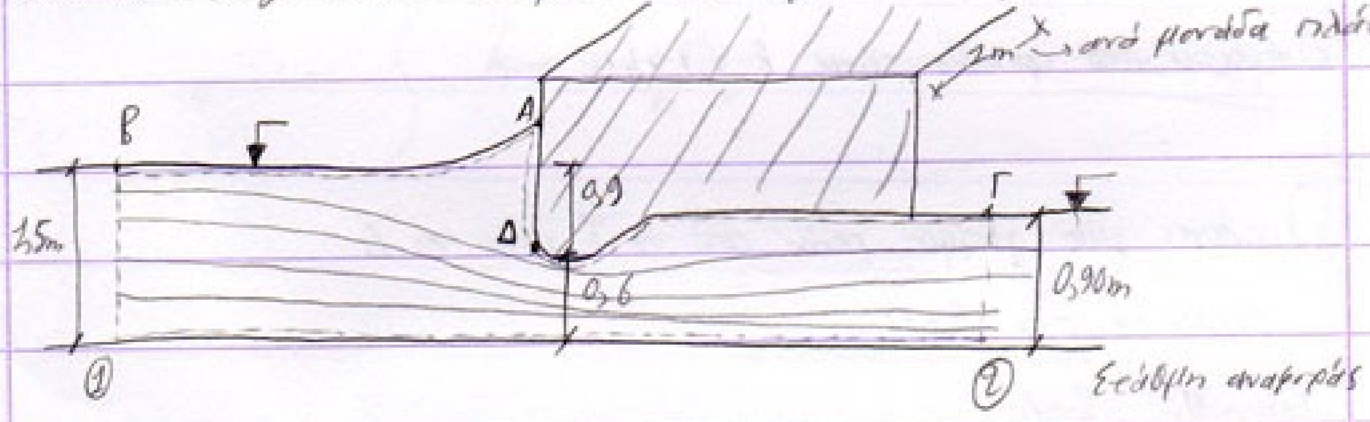


$$\boxed{\rho \cdot Q \cdot \vec{U_1} + \Sigma \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \vec{U_2}}$$ SOS!!!!

κατά x: $\rho \cdot Q \cdot U_{1x} + p_1 \cdot A_1 - R_x - p_{2x} \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot U_{2x}$

κατά y: $\rho \cdot Q \cdot \cancel{U_{1y}}^{0} + \cancel{p_{1y}} A_1 + R_y - B - p_{2y} \cdot A_2 = \rho \cdot Q \cdot U_{2y}$ $\rightarrow$ R_x, R_y

Να υπολογισθεί α) η παροχή της ροής ανά μονάδα πλάτους και β) η δύναμη που εξασκείται στο εμπόδιο ανά μονάδα πλάτους. γ) Ακολούθως να υπολογισθεί η ανύψωση του νερού στο σημείο Α.



α) Εξίσωση συνέχειας : Μακριά από το εμπόδιο → όλα ομαλά

$$U_1 \cdot 1{,}5 \cdot 1 = U_2 \cdot 0{,}9 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{U_1 = 0{,}6 \cdot U_2} \text{ ①}$$

Bernoulli (Β)→(Γ)

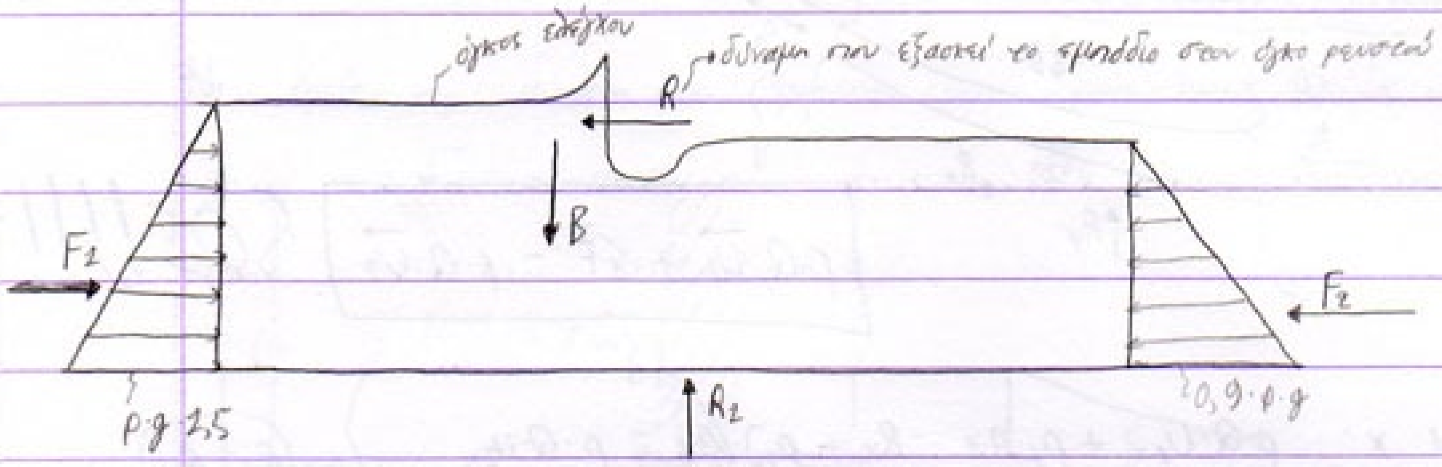
$$Z_B + \cancel{\frac{p_B}{\rho g}}^{0} + \frac{V_B^2}{2 \cdot g} = Z_\Gamma + \cancel{\frac{p_\Gamma}{\rho \cdot g}}^{0} + \frac{V_\Gamma^2}{2 \cdot g} \Rightarrow 1{,}5 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = 0{,}9 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

→ ΜΑΓΚΙΑ! Πήρα δύο σημεία πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια για να μηδενιστούν τις πιέσεις.

$U_2 = 4{,}289$ m/sec.
$U_1 = 2{,}579$ m/sec.

$Q = V_1 \cdot 1{,}5 = 3{,}860 \ m^3/sec.$ ανά μονάδα πλάτους

(συνέχεια)→



$F_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot (\rho \cdot g \cdot 2{,}5)$ $\qquad$ $F_2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 \cdot (0{,}9 \cdot \rho \cdot g)$

<u>Θεώρημα κατά x-x:</u>

$\rho \cdot Q \cdot U_1 - \rho\, Q \cdot U_2 + F_1 - F_2 - R = 0 \Rightarrow \underline{R = 439{,}44N}$

άρα, κάθε μέτρο πλάτους δέχεται δύναμη $R = 439{,}44N$. Η δύναμη που εξασκείται στο εμπόδιο είναι $R = 439{,}44N$.

γ) υπάρχει μια γραμμή ροής από το Β μέχρι το Δ.

ταχύτητα <u>στο Δ=0</u>

<u>Bernoulli Β→Δ</u>

$$Z_B + \frac{p_B^{\approx 0}}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} = Z_\Delta + \frac{p_\Delta}{\rho \cdot g} + \frac{V_\Delta^{2\,\approx 0}}{2g} \Rightarrow p_\Delta = \rho \cdot g \cdot 2{,}237 \quad (1)$$

Η πίεση στο Δ είναι υδροστατική και λόγω του ύψους:

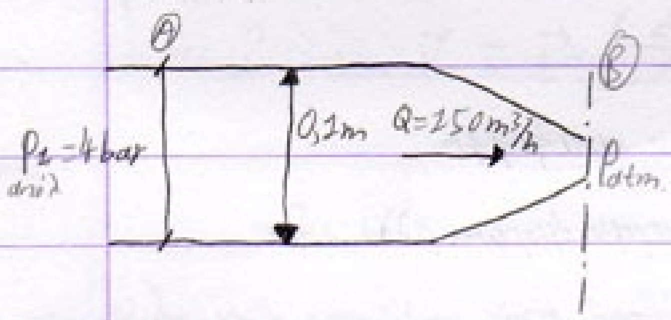
$$p_\Delta = \rho \cdot g\,(\mathrm{A}\Delta) = \rho \cdot g \cdot (1{,}5 - 0{,}6 + \Delta h) \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\Delta h = 0{,}337m}$$

ΑΝΥΨΩΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ: BERNOULLI + ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΙΕΣΗΣ

ΑΚΡΟΦΥΣΙΟ

Σε οριζόντιο σωλήνα κυκλικής διατομής διαμέτρου $d=20cm=0,2m$ τρέχει νερό με παροχή $Q=250\ m^3/h$ και απόλυτη πίεση $P=4\ bar$. Στο σωλήνα προβλέπεται να τοποθετηθεί συγκλίνον ακροφύσιο που οδηγεί τη ροή στην ατμοσφαιρική πίεση. α) Βρείτε την ταχύτητα εξόδου και τη διάμετρο στην έξοδο της ροής. Οι τριβές στο ακροφύσιο (να θεωρηθούν) αμελητέες.

ΛΥΣΗ



SOS → Δίνει απόλυτη πίεση 4bar → Η πίεση στην έξοδο είναι 1 Atm.
(αν έδινε $P_{σχετ}=4bar$, τότε $P_{εξόδ.}=0$)

είναι: $Q=V_1\cdot A_1 \Rightarrow V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{\frac{\pi\cdot d_1^2}{4}} \Rightarrow V_1=5,32\ m/sec.$

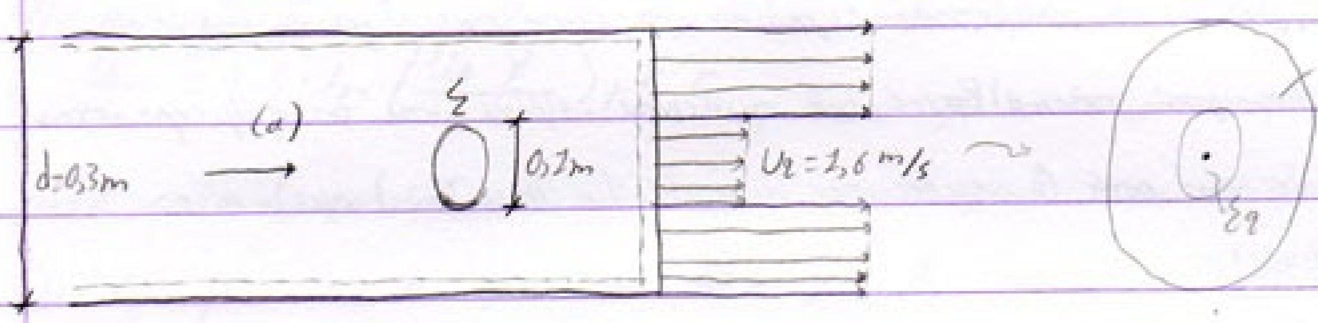
Bernoulli (στον άξονα συμμετρίας)

$$\cancel{z_A}+\frac{p_A}{\rho\cdot g}+\frac{V_A^2}{2\cdot g}=\cancel{z_B}+\frac{p_B}{\rho\cdot g}+\frac{V_B^2}{2\cdot g}$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot 10^5}{1.000\cdot 9,81}+\frac{5,32^2}{2\cdot 9,81}=\frac{101337}{1.000\cdot 9,81}+\frac{V_B^2}{2\cdot 9,81} \Rightarrow \boxed{V_B=25,02\ m/sec}$$

$$Q=A_2\cdot U_B \Rightarrow 0,0416=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot 25,01 \Rightarrow \boxed{D=0,046m}$$

Έστω ο αγωγός του σχήματος. Η παροχή που τον διαρρέει είναι $Q=0,141\ m^3/sec$ και η κατανομή ταχυτήτων όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθεί η δύναμη που εξασκείται στη σφαίρα.



ΛΥΣΗ

Στη διατομή εισόδου η παροχή είναι ομοιόμορφη.

Στη διατομή εξόδου η παροχή είναι ανομοιόμορφη, αλλά ίδια.

Ο εσωτερικός δακτύλιος και μαζί και το νερό που καλύπτει έχει ταχύτητα 1,6 m/sec.

Είναι $\Sigma_1 = \dfrac{\pi \cdot d_1^2}{4}$ ($d_1^2 = 0,3^2$) $\Rightarrow \underline{\Sigma_1 = 0,0707\ m^2}$

$\Sigma_2 = \dfrac{\pi \cdot d_2^2}{4}$ ($= 0,1^2$) $\Rightarrow \underline{\Sigma_2 = 0,0079\ m^2}$

άρα, $\Sigma_3 = \Sigma_1 - \Sigma_2 \Rightarrow \underline{\Sigma_3 = 0,0628\ m^2}$

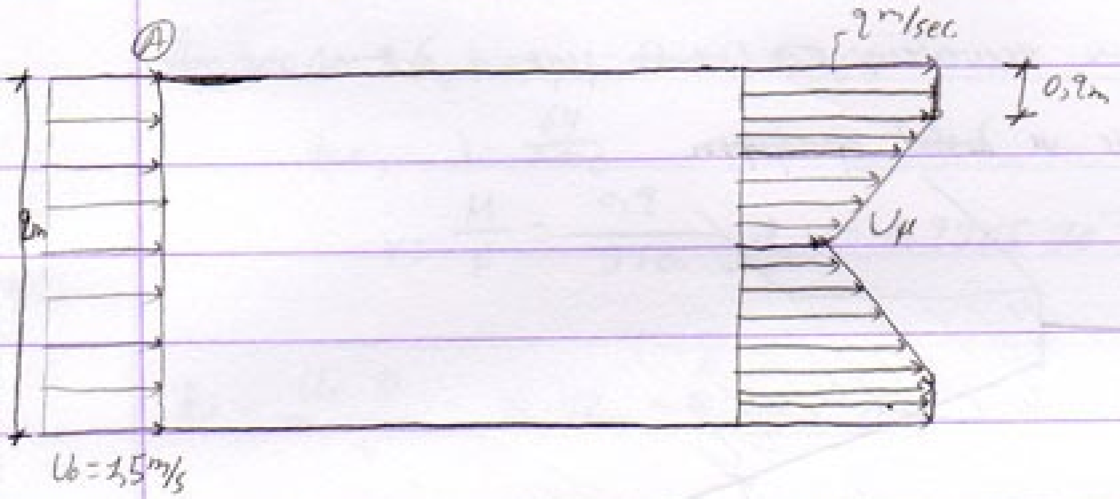
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow V_1 \Sigma_1 = V_2 \Sigma_2 + V_3 \cdot \Sigma_3 \Rightarrow Q = V_2 \Sigma_2 + V_3 \cdot \Sigma_3$$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{Q - V_2 \Sigma_2}{\Sigma_3} \Rightarrow V_3 = 2,044\ m/sec.$$

συνέχεια →

Παροχή σε ανομοιόμορφη κατανομή ταχυτήτων

$$Q = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$$

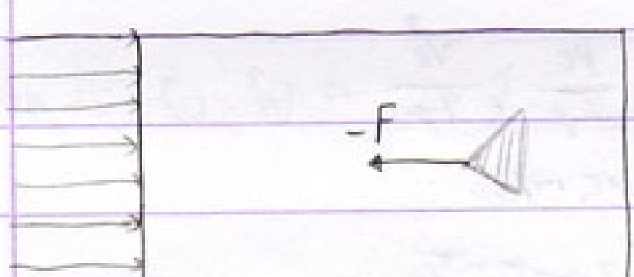


$$A: \int_{\Sigma_1} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = -2 \cdot 1,5 = -3 \ m^2/s$$

$$B: \int_{\Sigma_2+\Sigma_3} \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 2\left[2 \cdot 0,2 + \frac{2+U_\mu}{2} \cdot 0,8\right]$$

$$\Rightarrow -3 + 2 \cdot \left[2 \cdot 0,2 + \frac{2+U_\mu}{2} \cdot 0,8\right] = 0 \rightarrow \boxed{U_\mu = 0,75 \ m/sec.}$$

Θεώρημα ποσότητας κίνησης



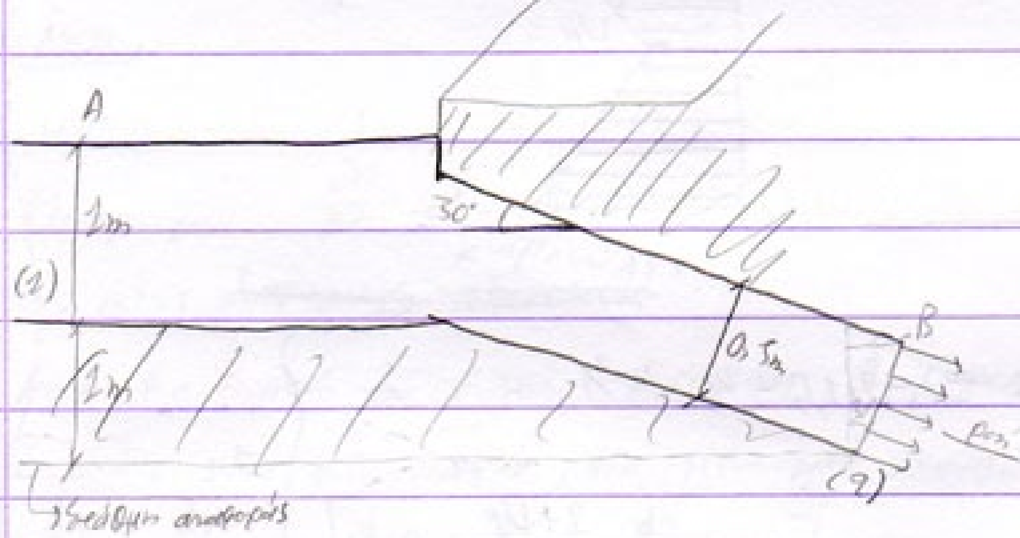
Αν F η δύναμη που ασκεί το νερό στο εμπόδιο, τότε -F η εξωτερική δύναμη από το εμπόδιο στο νερό

$$-F = \int_{\Sigma_1} \rho \cdot V_1 \cdot (-V_1) \, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \rho \cdot V_2^2 \, d\Sigma$$

$$\Rightarrow -F = V_0 \cdot \rho \cdot (-2V_0) + \int_{\Sigma_2} \rho \cdot V_2^2 \, d\Sigma$$

$$\Rightarrow -F = -2 \cdot V_0^2 \cdot 1.000 + 2 \cdot 1.000 \cdot 2^2 \cdot 0,2 + 2\int_{\Sigma_2} \rho \cdot V_2^2 \, d\Sigma$$

Να βρεθεί το μέγεθος της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης που ασκείται από το ρευστό στην κατασκευή του σχήματος ανά μονάδα πλάτους. Η κατανομή των πιέσεων στον ανοιχτό αγωγό είναι υδροστατική. Η κατανομή των ταχυτήτων στο κανάλι μακριά από τη σήραγγα και στο σημείο εκροής να ληφθεί ομοιόμορφη.



Εξίσωση συνέχειας

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow \boxed{U_1 = 0,5 \cdot U_2} \quad (1)$$

Παίρνω την στάθμη αναφοράς την κάτω και μια γραμμή ροής A → B.

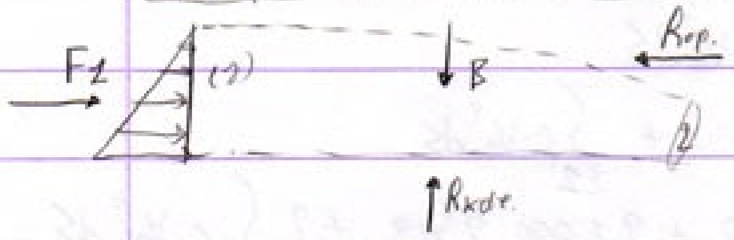
Bernoulli

$$H_A = H_B \Rightarrow z_A + \frac{p_A}{\rho \cdot g} + \frac{V_A^2}{2 \cdot g} = z_B + \frac{p_B}{\rho \cdot g} + \frac{V_B^2}{2 \cdot g} \Rightarrow U_B^2 - U_A^2 = 34,989 \quad (2)$$

(1),(2) → $U_B = 5,830$ m/sec. $U_A = 3,415$ m/sec.

άρα, $Q_1 = Q_2 = Q = 3,425$ m³/sec

Θεώρημα ποσότητας κίνησης



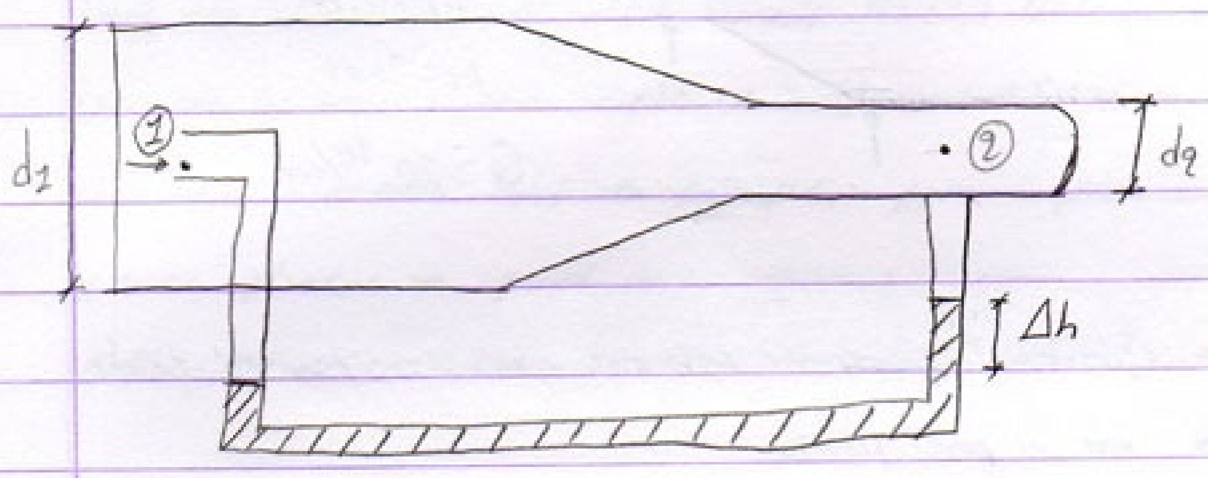
Θ.Π.Κ. κατά x

$$\rho \cdot Q \cdot V_1 - \rho \cdot Q \cdot V_{2x} + F_1 - R_{οριζ} = 0$$

$$\Rightarrow R_{ορ.} = +3639 \text{ N/μονάδα πλάτους}$$

Άρα η κατασκευή δέχεται ίση και αντίθετη δύναμη.

Η διαφορά πιέσεως μεταξύ των σημείων (1) και (2) μετρήθηκε ίση με 3000 Pa. Να υπολογιστεί η παροχή του νερού που διέρχεται από τον αγωγό. ($d_1 = 10cm$, $d_2 = 6cm$)



Bernoulli (1)→(2)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2 \cdot g} \quad (1)$$

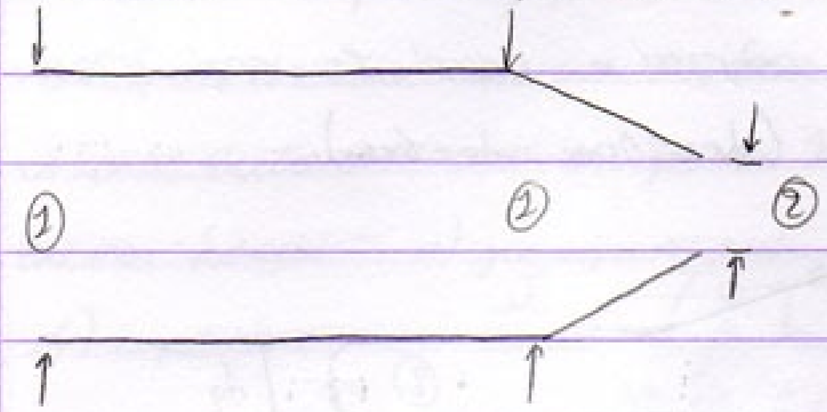
Εξίσωση συνέχειας

$$V_1 \cdot \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \cdot \frac{\pi D_2^2}{4} \Rightarrow U_2 = 2,778 \cdot V_1 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow U_1 = 0,945 \, m/s \, , \quad U_2 = 2,625 \, m/sec$$

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4} \cdot V_1 = 7,422 \cdot 10^{-3} \, m^3/sec.$$

Ζητείται η συνολική δύναμη που ασκείται στο ακροφύσιο.



$D_1 = 20cm$

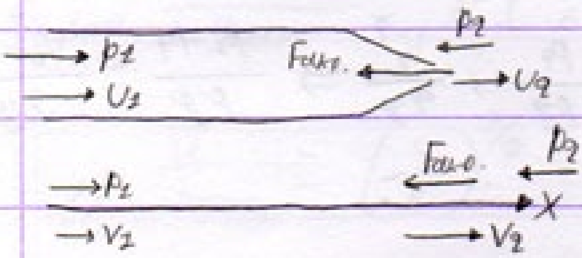
$D_2 = 3cm$

$p_1 = 2bar$

$Q = 20\ lt/sec.$

ΛΥΣΗ

Ισχύει η εξίσωση ποσότητας κίνησης, αφού το ρευστό είναι ασυμπίεστο και η ροή μόνιμη.



Στον άξονα x-x:

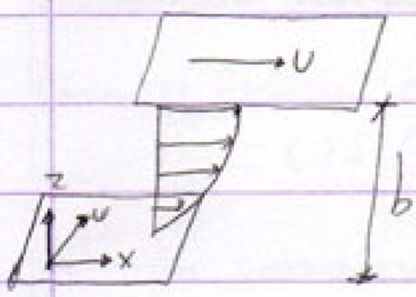
$$\rho \cdot Q \cdot \vec{V_1} + \Sigma \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot \vec{V_2}$$

$$\Rightarrow 2000 \cdot 0{,}02 \cdot V_1 - F_{ακρ} + p_1 A_1 - \cancel{p_2}^{0} = \rho \cdot Q \cdot V_2$$

$$Q = Q_1 = Q_2 \Rightarrow d_1^2 \cdot V_1 = d_2^2 \cdot V_2$$

ΘΕΩΡΙΑ SOS!!!!

ΡΟΗ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ



Κάτω πλάκα ακίνητη, η πάνω κινείται.

$v, w = 0$

$$u = U \cdot \frac{z}{b} + \frac{k}{2\mu} \cdot z \cdot (b - z)$$

, όπου $k = -\frac{dp}{dx}$

Τυπολόγιο Γκανούλη σελ. 254↔264

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot \bar{U}^2} = \frac{12}{Re} \left(1 - \frac{U}{2\bar{U}}\right) \left(\frac{L}{b}\right)$$

$$\bar{U} = \frac{U}{2} + \frac{k \cdot b^2}{12\mu}$$

$$\lambda \cdot Re = 24 \left(1 - \frac{U}{\bar{U}}\right)$$

$$Re = \frac{\bar{U}}{b \cdot v}$$

$$\lambda = \frac{\Delta H}{L}$$

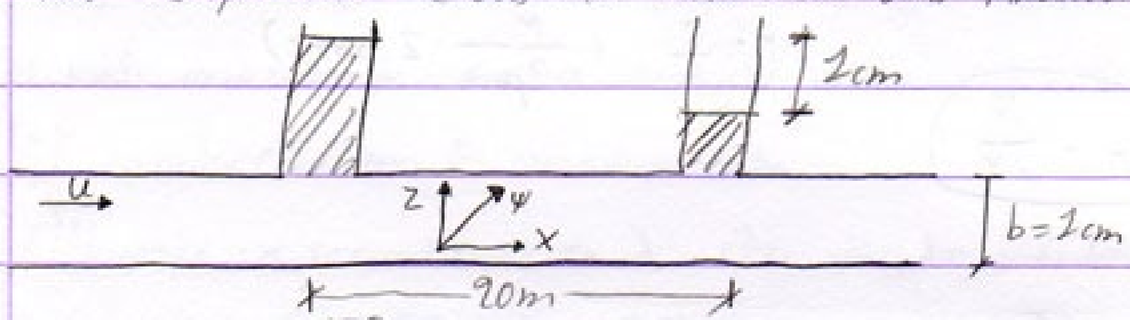
ΠΟΛΥ ΚΑΛΟ! ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η πτώση πίεσης του νερού που κινείται μεταξύ 2 ακίνητων πλακών //, είναι 1cm ανά μήκος 20m. Ζητούνται:

1) Η μέση ταχύτητα και η παροχή.

2) Η περιστροφή του νερού στα τοιχώματα.

3) Οι διατμητικές τάσεις που ασκούνται στις πλάκες.



1) $\bar{U} = \underbrace{\frac{U}{2}}_{=0} + \frac{k\cdot b^2}{12\cdot \mu}$ με $U=0$, $\mu = 10^{-3}$

$k = -\frac{dP}{dx} = -\left(\frac{P_{\delta\varepsilon\xi} - P_{\alpha\rho}}{20}\right) = -\left(\frac{-1cm}{20}\right) \Rightarrow k = 4,905$

άρα, $\bar{U} = \frac{4,905\cdot 0,01^2}{12\cdot 10^{-3}} \Rightarrow \bar{u} = 0,040875$ m/sec.

παροχή: $q = \bar{u}\cdot b = 40,875\cdot 10^{-3}\cdot 0,01 \Rightarrow q = 40,875\cdot 10^{-5}$ m³/sec.

2) $\nabla\bar{u} = \dots\dots = \vec{j}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} - \vec{k}\cdot\frac{\partial u}{\partial \psi}$ παράλληλες πλάκες: $\frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$

άρα, $\nabla\bar{u} = \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j}$

$u = \cancel{U\frac{z}{b}}^{\,0} + \frac{k}{2\mu}\cdot z\cdot(b-z) \Rightarrow u = \frac{z\cdot k\cdot b}{2\cdot\mu} - \frac{k\cdot z^2}{2\mu} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{kb}{2\mu} - \frac{kz}{\mu}\right)\vec{j}$

3) $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dz}$

Ήδη έχω βρει ότι: $\frac{du}{dz} = \frac{k \cdot b}{2 \cdot \mu} - \frac{k \cdot z}{\mu}$

άρα, $\tau = \mu \left(\frac{k \cdot b}{2\mu} - \frac{kz}{\mu} \right) = \frac{\mu}{\mu} \cdot \left(\frac{kb}{2} - kz \right)$

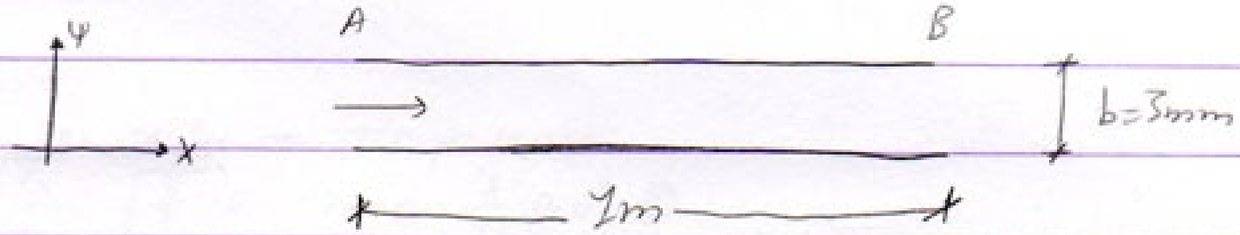
$\tau_{\text{κάτω πλάκας}} \overset{z=0}{=} \frac{k \cdot b}{2} - 0 = \frac{k \cdot b}{2}$

$\tau_{\text{πάνω πλάκας}} \overset{z=b}{=} \frac{k \cdot b}{2} - k \cdot b = -\frac{k \cdot b}{2}$

Η ταχύτητα του ρευστού που κινείται μεταξύ 2 παραλ-
λήλων πλακών δίνεται από τη σχέση: $u = -\frac{dp}{dx}\frac{1}{2\mu}(b-\psi)\cdot\psi$.
Εάν η διαφορά πιεζομετρικού φορτίου μεταξύ Α,Β είναι 1m, να υπολογιστούν: (1) Η τιμή της στροβιλότητας του ρευστού που εφάπτεται σε κάθε πλάκα. (2) Η δύναμη που εξασκείται σε κάθε πλάκα ανά μονάδα πλάτους.

Δίνονται $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\mu = 10^{-3}\ Pa$

ΛΥΣΗ



1) $\bar{\nabla} \times \vec{V} = \dots$

πίεση p: σε Pa ή πίεση σε μέτρα στήλης νερού $\frac{p}{\rho \cdot g}$ (σε m).

Η άσκηση δίνει: $\frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = 1m \Rightarrow \Delta p = 1\cdot\rho\cdot g = 9810 Pa$

$\frac{dp}{dx} = \frac{-9810}{1m} = -9810$ Σχόλιο: Το Α έχει μεγαλύτερη πίεση από το Β για να κινείται το νερό από Α→Β.

$\frac{dp}{dx} = \frac{p_B - p_A}{dx}$

$$u = -(-9810)\cdot\frac{1}{2\cdot 10^{-3}}\cdot\psi\cdot(0{,}003-\psi) = 14715\cdot\psi - 4{,}905\cdot 10^6\psi^2$$

Άρα, σε μας η στροβιλότητα είναι διάνυσμα κάθετο στο χαρτί μας. SOS

$$\bar{\nabla}\times\bar{V} = -\frac{\partial u}{\partial \psi}\bar{k} = -\bar{k}\left[14715 - 9{,}81\cdot 10^6\cdot\psi\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = (14715 - 9{,}81\cdot 10^6\psi)$$

κάτω πλάκα: $\psi = 0 \rightarrow$ στροβιλότητα $= -14715\,\bar{k}$

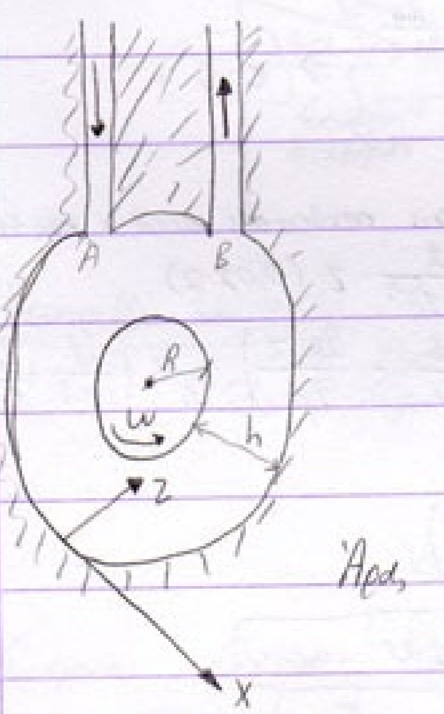
πάνω πλάκα: $\psi = b \rightarrow$ στροβιλότητα $= +14715\,\bar{k}$

2) $\tau = \mu\cdot\frac{du}{d\psi} = 10^{-3}(14715 - 9{,}81\cdot 10^6\cdot\psi)$
→ $\tau_{\text{κάτω πλάκας}} = 14.715\ N/m^2$
→ $\tau_{\text{πάνω πλάκας}} = -14.715\ Pa$

$$\frac{F}{A} = \tau = \pm 14{,}715 N$$

Η διάταξη του σχήματος αποτελείται εξωτερικά από μια ακίνητη θήκη και εσωτερικά από ένα ομόκεντρο τύμπανο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Η απόσταση των δύο διατομών θεωρείται μικρή σε σχέση με την όλη διαδρομή(;). Η διαφορά πίεσης που δημιουργείται είναι $\Delta p = p_B - p_A$, όπου $p_B > p_A$. Το πάχος του ρευστού h θεωρείται μικρό σε σχέση με την ακτίνα, έτσι ώστε να θεωρήσουμε τη ροή ισοδύναμη με εκείνη μεταξύ 2 παραλλήλων επιπέδων. α) Ποια η κατανομή της ταχύτητας στο πάχος h; β) Ποια η τάση τριβής στο ακίνητο τοίχωμα;

ΛΥΣΗ



Επειδή $p_B > p_A$, αν δεν υπήρχε το περιστρεφόμενο τύμπανο η ροή θα ήταν από το $B \to A$.

$$u = U\cdot\left(\frac{z}{b}\right) + \frac{k}{2\mu}\cdot z\cdot(b-z)$$

$U = \omega\cdot R$ και $b = h$

και $k = -\frac{dp}{dx} = -\frac{p_B - p_A}{2\pi R} = -\frac{\Delta p}{2\pi R}$

Άρα, $u = \omega\cdot R\left(\frac{z}{h}\right) + \left(\frac{-\Delta p/2\pi R}{2\mu}\right)\cdot z\cdot(h-z)$

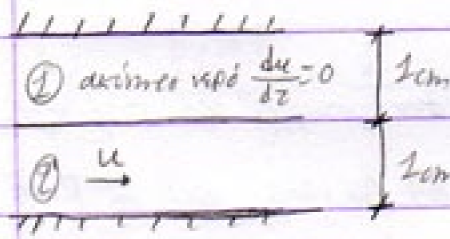
$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{\omega\cdot R}{h}\cdot z - \frac{\Delta p}{4\pi R\mu}\cdot z\cdot(h-z)}$$

β) $\tau = \mu\frac{du}{dz} = \mu\left(\frac{\omega\cdot R}{h} - \frac{\Delta p\cdot h}{4\pi R\mu} + \frac{2\Delta p\cdot z}{4\pi R\mu}\right)$

$\tau^{\text{ακίν. πλάκας}}$ (για $z=0$) $= \mu\cdot\left[\frac{\omega\cdot R}{h} - \frac{\Delta p\cdot h}{4\pi R\mu}\right]$

Δυο παράλληλες στρώσεις νερού βρίσκονται μεταξύ 3ών // πλακών. Στην (1) το νερό είναι ακίνητο, ενώ στην (2) κινείται με ταχύτητα u. Η μεσαία πλάκα κινείται με ταχύτητα $\bar{U}$ και η κλίση πίεσης $k = -\frac{dp}{dx}$ στη στρώση (2) είναι $1\ Pa/m$. Ζητούνται: α) Οι διατμητικές τάσεις που εξασκούνται στη μεσαία πλάκα και από τις δύο στρώσεις. β) Επίσης, η στροβιλότητα στη στρώση (2) και η ταχύτητα της μεσαίας πλάκας ώστε η στροβιλότητα στην επιφάνεια της πλάκας αυτής να είναι 0. $\mu = 10^{-3}\ Pa$

ΛΥΣΗ



α) Η διατμητική τάση στο πάνω μέρος της πλάκας είναι: $\left.\begin{array}{l} \tau = \mu \cdot \frac{du}{dz} \\ \frac{du}{dz} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tau = 0}$

ροή σε παράλληλες πλάκες: υπάρχει συνιστώσα της ταχύτητας κατά x και είναι:

$$u = U \cdot \frac{z}{b} + \frac{k}{2\mu} \cdot z(b-z) = U \cdot \frac{z}{0{,}01} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot z \cdot (0{,}01 - z)$$

Διατμητικές τάσεις: $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dz} = \mu \cdot \left(\frac{U}{b} + \frac{k \cdot b}{2\mu} - \frac{2kz}{2\mu}\right) = 10^{-3} \cdot \left(\frac{U}{0{,}01} + \frac{1 \cdot 0{,}01}{2 \cdot 10^{-3}} - \frac{1 \cdot z}{10^{-3}}\right)$

Άρα, μόνο από στρώση (2):

$$\tau_{\substack{\text{μεσαίας}\\ \text{πλάκας}}} \underset{b=1cm}{=\!=} 10^{-3}\left(\frac{U}{0{,}01} + \frac{0{,}01}{2 \cdot 10^{-3}} - \frac{1 \cdot 0{,}01}{10^{-3}}\right)$$

$$\Rightarrow \tau_{\mu.\pi} = 0{,}1 \cdot U + 0{,}005 - 0{,}01 \Rightarrow \boxed{\tau_{\mu.\pi} = 0{,}1 \cdot U - 0{,}005}$$

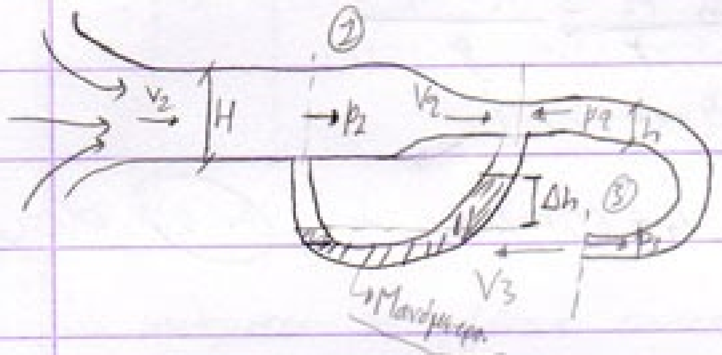
β) $\bar{\nabla} \times \bar{u} = \ldots = \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} = \vec{j}\left(\frac{U}{b} + \frac{k \cdot b}{2\mu} - \frac{k}{\mu} \cdot z\right)$

$$\bar{\nabla} \times \bar{u}_{\mu.\pi} = \bar{\nabla} \times \bar{u}\big|_{z=b} = \vec{j}\left(\frac{U}{b} - \frac{k \cdot b}{2\mu}\right)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = 0 \Rightarrow \frac{U}{b} - \frac{kb}{2\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{U = 0{,}05\ m/sec.}$$

{ΜΑΝΟΜΕΤΡΑ - BERNOULLI - ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ
ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ - ΑΚΡΟΦΥΣΙΑ}

Ορθογωνικός αγωγός, στένωση, οριζόντιος αγωγός



$H = 90cm$, $L = 45cm$

$h = 40cm$, $l = 20cm$

$\rho_a = 1,2\ kg/m^3$

$\rho_{Hg} = 13.600\ kg/m^3$

$\Delta h = 15,5mm$ αμελητέες απώλειες

$p_{ατμ} = 0$ α) $Q = ;$, β) Δύναμη από τον αέρα στη στένωση

Bernoulli $(1) \to (2)$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Επειδή ο αγωγός είναι οριζ. : $z_1 = z_2$ $\Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma_a}$ αλλά $\gamma_a = \rho_a g \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2 \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_a \cancel{g}} \cancel{g} \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\Delta p}{\rho_a}$

Αλλά από το μανόμετρο έχουμε: $\Delta p = \rho_{Hg} g \Delta h = 13.600 \cdot 9,81 \cdot 0,0155 = 2.067,948$

άρα, $V_2^2 - V_1^2 = \frac{2 \cdot 2067,948}{1,2} \Rightarrow \underline{V_2^2 - V_1^2 = 3446,6}$ (1)

Εξίσωση συνέχειας : $Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 \Rightarrow 0,9 \cdot 0,45 \cdot V_1 = 0,4 \cdot 0,2 \cdot V_2$

$\Rightarrow V_2 = 5,0625 V_1$ (2)

(1), (2) $\to$ $V_1 = 11,8\ m/s$, $V_2 = 60\ m/s$, άρα $Q = Q_1 = Q_2 = A_1 \cdot V_1 = 4,8\ m^3/s$

β) όσον ζητά δύναμη πάω στο θ. ποσότητας κίνησης:

$$F_{px} + \underbrace{F_{\tau x}}_{0\text{: αμελητέες απώλειες}} + F_{gx} = \rho \cdot Q\,(V_2 - V_1) \Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 - F = \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_1)$$

Πρέπει να βρω τα p_1, p_2

(συνέχεια) →

Από Bernoulli μεταξύ (2) και (3):

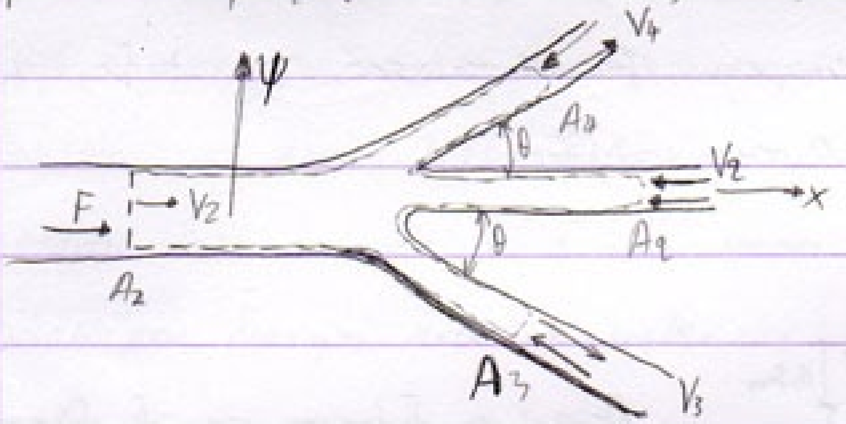
$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \cancel{z_2}_{0} = \cancel{\frac{p_3}{\gamma}}_{0} + \frac{V_3^2}{2g} + \cancel{z_3}_{0} \Rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = \frac{V_3^2 - V_2^2}{g}$$

λάθος!

$Q_2 = Q_3 \Rightarrow A_2 \cdot V_2 = A_3 \cdot V_3 \Rightarrow V_2 = V_3 = 60\ m/s$ άρα, $p_2 = 0$ άτοπο

Μήπως είμαστε σε οριζόντιο επίπεδο;

Οι δύο δέσμες νερού του σχήματος κυκλικής διατομής συγκρούονται με την ίδια ταχύτητα V. Να υπολογισθεί η γωνία θ. Το φαινόμενο συμβαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και η πίεση είναι παντού ίση με την ατμοσφαιρική. $V=5\ m/s$, $d_1=0{,}10m$, $d_2=0{,}05m$



$V_1 = V_2 = V$

$V_3 = V_4 = U$

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_{atm} = 0$

$z_i = 0$: σε οριζόντιο επίπεδο.

- Εξίσωση συνέχειας

$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4 \Rightarrow V A_1 + V A_2 = 2 \cdot U \cdot A_3 \quad (1)$

- Εξίσωση ενέργειας (Bernoulli)

Μεταξύ 1 και 3 : $z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho \cdot g} + \frac{V_3^2}{2g} \Rightarrow V_1 = V_3 \Rightarrow \boxed{V = U}$

από $(1),(2) \Rightarrow A_1 + A_2 = 2A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{A_1 + A_2}{2}$

- Θεώρημα ποσότητας κίνησης

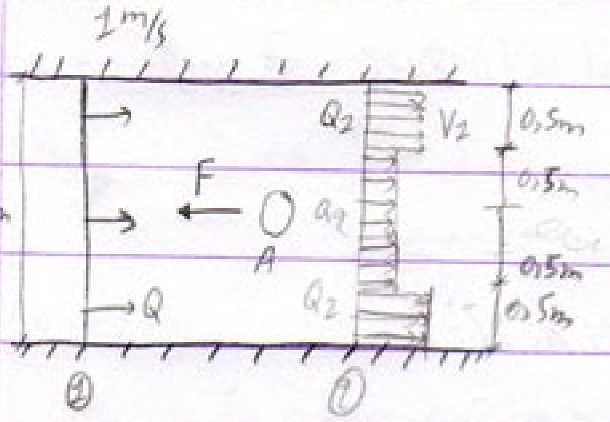
κατά x-x: $0 = \rho \cdot V Q_1 - \rho \cdot V \cdot Q_2 - 2\rho \cdot V \cdot Q_3 \cdot \cos\theta \Rightarrow Q_1 - Q_2 - 2Q_3 \cdot \cos\theta = 0$

Επίσης: $\left.\begin{matrix} 2A_3 = A_1 + A_2 \\ V = U \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2Q_3 = Q_1 + Q_2$

από (3),(4) : $\cos\theta = \frac{-Q_2 + Q_1}{Q_1 + Q_2} = \dots$

Η κατανομή ταχυτήτων του νερού στις διατομές (1) και (2) για ροή γύρω από κύλινδρο σε οριζόντια υδροστήριξη φαίνεται στο σχήμα. Αγνοώντας τις τριβές στα τοιχώματα της στήριξης και υποθέτοντας πίεση ίση με την ατμοσφαιρική στις διατομές 1 και 2 να υπολογίσετε τη δύναμη που εξασκεί το νερό στον κύλινδρο και την πίεση στο σημείο Α του κυλίνδρου.

Λύση



Θεωρώ τη διάσταση που δε δίνεται ίση με 1.

Άρα, $\left.\begin{array}{l} \Sigma = b\cdot h \\ b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma = h$

① Εξίσωση συνέχειας

$$Q = 2Q_1 + Q_2 \Rightarrow 1\cdot 2 = 2\cdot(0,5\cdot 2,5) + 2\cdot 0,5\cdot V \Rightarrow V = 0,5\ m/s$$

② Θεώρημα ποσότητας κίνησης (κατά x-x)

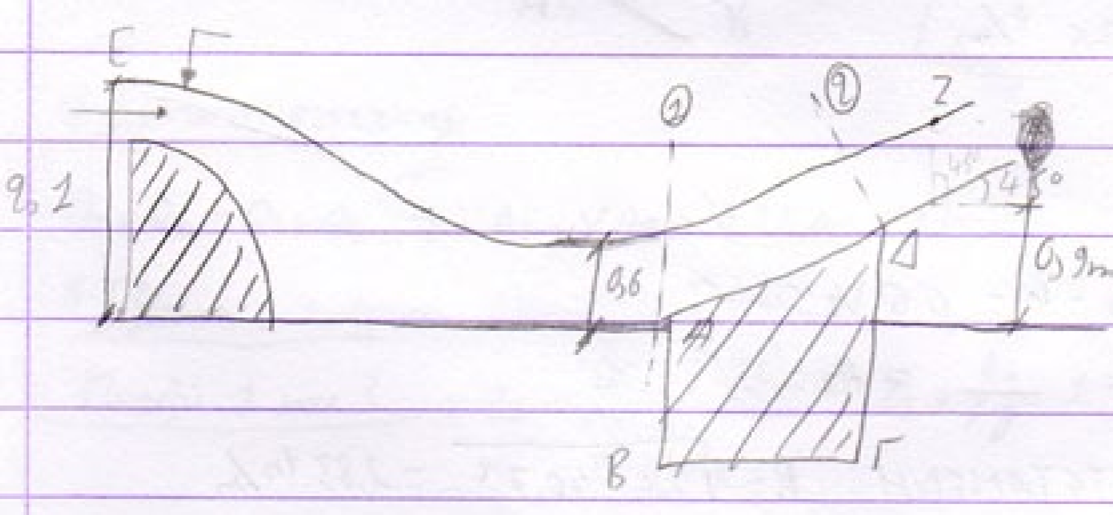
$$\rho\cdot Q_1\cdot V_1 + \rho\cdot Q_2\cdot V_2 - \rho\cdot Q\cdot V = -F \Rightarrow -F = \rho\cdot(Q_1\cdot V_1 - Q_2\cdot V_2 - Q\cdot V)$$

$$\Rightarrow -F = \frac{\gamma}{g}\cdot(0,5\cdot 2\cdot 2,5^2 + 2\cdot 0,5\cdot 0,5^2 - 2\cdot 1^2) \Rightarrow \boxed{F = -52\,kg}$$

③ Εξίσωση ενέργειας (Bernoulli)

$$\cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \frac{U_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{p_A}{\gamma} + \cancel{\frac{U_A^2}{2g}} + \cancel{z_A} \Rightarrow \boxed{\frac{p_A}{\gamma} = \frac{1,0^2}{2\cdot 9,81}}$$

Για την απομάκρυνση του νερού που παροχετεύεται από τον εκχειλιστή του σχήματος χρησιμοποιείται η κατασκευή από σκυρόδεμα ΑΒΓΔ που καλείται "σκί jump". Να υπολογισεί η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που εξασκείται στην κατασκευή ΑΒΓΔ ανά μονάδα πλάτους αν το νερό μεταξύ των διατομών (1),(2) έχει βάρος 2,7kN. Κάνοντας την παραδοχή ότι το νερό κατάντη της διατομής 2 συμπεριφέρεται σαν ελεύθερη δέσμη, η πίεση στη διατομή αυτή να ληφθεί ίση με την ατμοσφαιρική.



Βάρος (1)-(2)

Θεωρώ $b=1$

άρα $z_1=h_1$

$z_2=h_2$ (γιατί;)

$p_1=p_2=p_{atm}$

Εξίσωση συνέχειας:

$V_E \cdot 2{,}1 \cdot 1 = V_Z \cdot 0{,}6 \cdot 1 \Rightarrow V_Z = 3{,}5 \cdot V_E \quad (1)$

Εξίσωση ενέργειας (Bernoulli) E–Z ($h_f=0$)

$$Z_E + \frac{p_E}{\rho \cdot g} + \frac{V_E^2}{2 \cdot g} = Z_Z + \frac{p_Z}{\rho \cdot g} + \frac{V_Z^2}{2 \cdot g} \Rightarrow 2{,}1 + \frac{V_E^2}{2 \cdot g} = 0{,}9 + \frac{V_Z^2}{2 \cdot g} \quad (2)$$

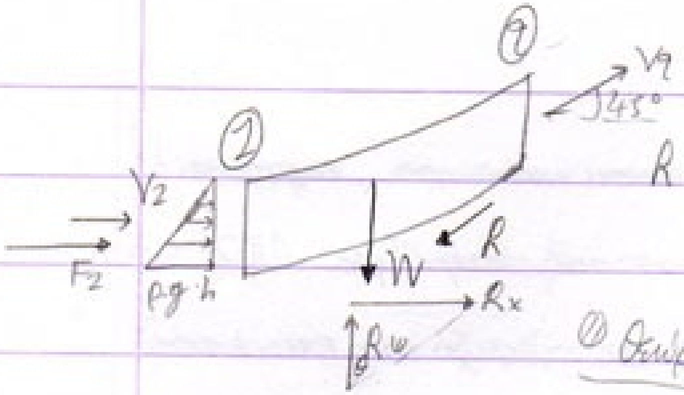
(1), (2): $V_E = 2{,}626\ m/sec$ και $V_Z = 9{,}256\ m/sec$.

$V_E \neq V_Z$ λόγω του ότι η διατομή δεν είναι ίδια.

Ερ.

συνέχεια

$+\rho \cdot Q \cdot V_1 \cos 45^\circ = -R_y - W$



R: τελική υγρού στα τοιχώματα

① Θεώρημα Ποσότητας κίνησης

Κατά x-x

$$-F_2 + R_x + \rho \cdot Q \cdot \underbrace{V_1 \cdot \cos 45^\circ}_{V_{1x}} - \rho \cdot Q \cdot V_2 = 0$$

αλλά $V_2 = V_1$ γιατί $Q_2 = Q_1$ και $\Sigma_2 = \Sigma_1$

άρα, $R_x = F_2 + \rho \cdot Q\,(V_2 - V_2 \cos 45^\circ) \Rightarrow R_x = \frac{1}{2} \cdot \rho g \cdot h^2 + \rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_2 \cos 45^\circ)$

$\Rightarrow R_x = 0{,}76 \ t/m$

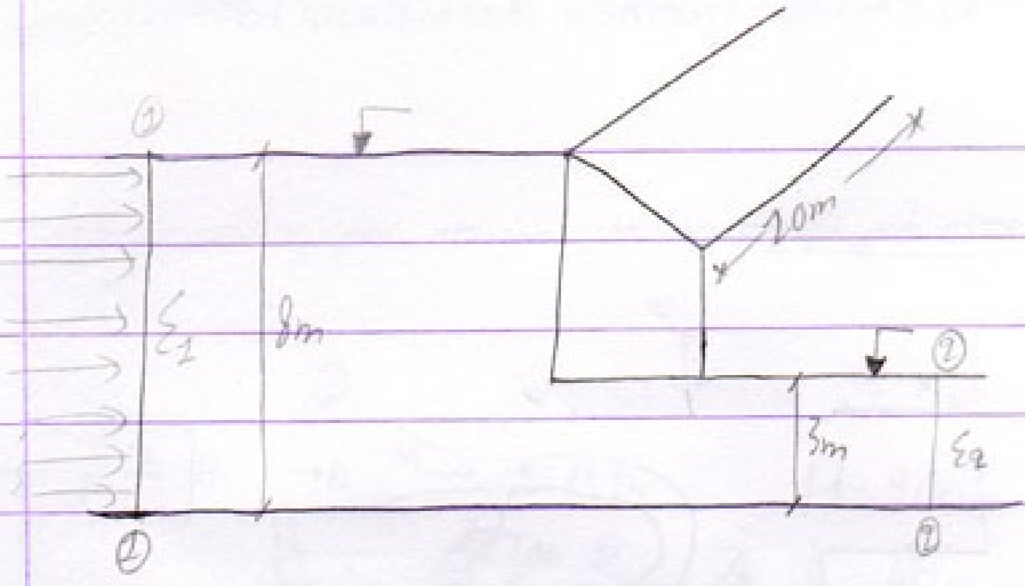
Κατά ψψ:

$$R_\psi - W = \rho \cdot Q \cdot V_2 \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow R_\psi = 2{,}67 \ tn/m$$

άρα, ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ: $R = \sqrt{2{,}67^2 + 0{,}76^2} = 2{,}83 \ tn/m$

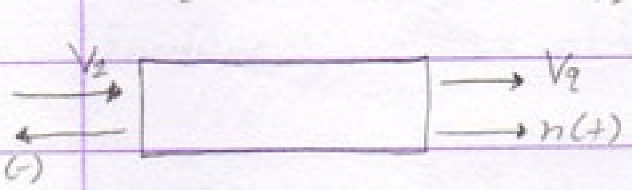
$$\tan\theta = \frac{R_\psi}{R_x} = 2{,}2 \Rightarrow \theta = 65{,}53^\circ$$



Να υπολογιστεί η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που δέχεται το θυρόφραγμα πλάτους 10m αν αγνοηθούν οι τριβές στον πυθμένα $\rho = 1000 \, kg/m^3$

① Εξίσωση συνέχειας

$$\int_{\Sigma} n\cdot\rho\cdot\vec{V}\, d\Sigma = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_1} n\cdot\rho\cdot\vec{V_1}\, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} n\cdot\rho\cdot\vec{V_2}\, d\Sigma_2 = 0$$



$$\int_{\Sigma_1} \vec{V_1}\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \vec{V_2}\, d\Sigma$$

$$\left.\begin{aligned} & Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1\cdot\Sigma_1 = V_2\cdot\Sigma_2 \\ & \Sigma_1 = 8\cdot 10 = 80 m^2 \\ & \Sigma_2 = 3\cdot 10 = 30 m^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_1 = 4\cdot 80 = 320 \, m^3/s$$

↳ το βρίσκω παρακάτω!

② Εξίσωση ενέργειας (Bernoulli)

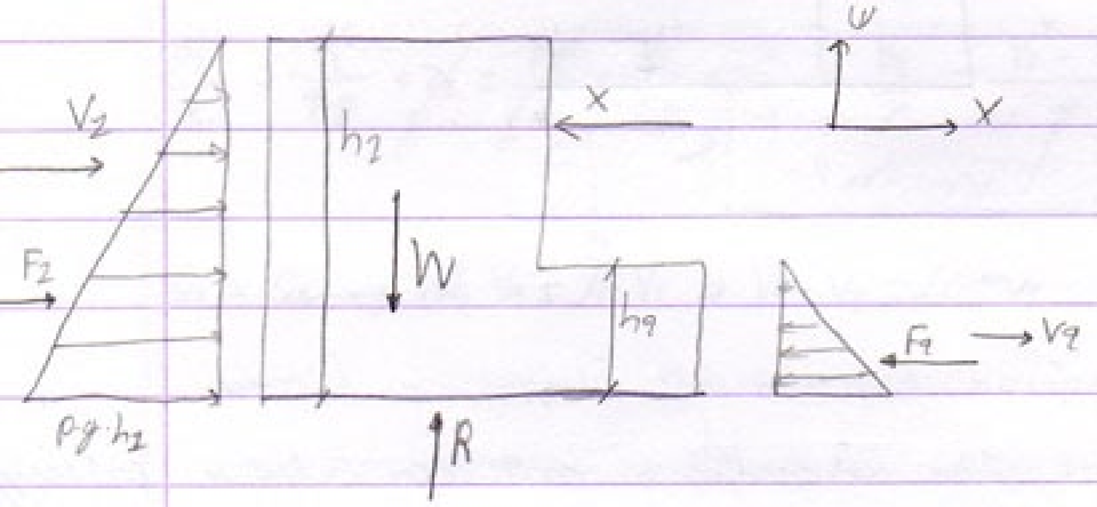
$$\left.\begin{aligned} & z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \\ & p_1 = p_2 = p_{ατμ.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 8 + \frac{V_1^2}{2g} = 3 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 5\cdot 2\cdot 9{,}81$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2^2 - V_1^2 = 98{,}1} \quad (1)$$

Αλλά, $V_1\cdot\Sigma_1 = V_2\cdot\Sigma_2 \Rightarrow V_2 = V_1\cdot\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow V_1 = 4{,}0 \, m/s$, $V_2 = 10{,}67 \, m/sec$.

Θεώρημα ποσότητας κίνησης



κατά y-y → $R - W = 0 \Rightarrow R = W$

κατά x-x : $F_2 - F_1 - X = \rho \cdot Q \cdot (V_1 - V_2)$

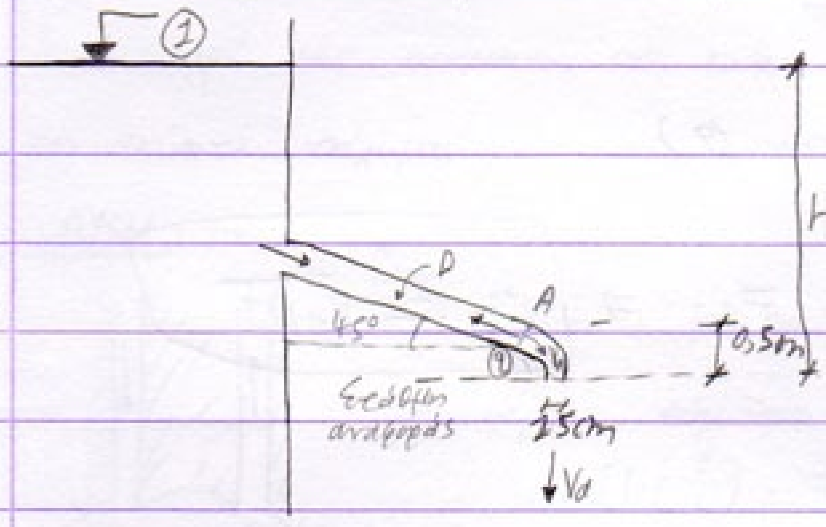
$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h_2^2 \, b_2$ $\qquad$ $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h_1^2 \, b_1$

SOS!!!!

Κεκλιμένος αγωγός διαμέτρου D που καταλήγει σε ακροφύσιο, αποχετεύει νερό από δεξαμενή μεγάλων διαστάσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μείωση της διαμέτρου στο άκρο του αγωγού αρχίζει από το σημείο Α. Να υπολογιστούν εάν αγνοηθούν οι τριβές:

α) Η παροχή που διαρρέει τον αγωγό και η πίεση στο σημείο Α.

β) Η δύναμη που ασκείται στο ακροφύσιο (από το σημείο Α μέχρι το άκρο). Το βάρος του νερού να θεωρηθεί αμελητέο.



	Α	Β	Γ	Δ
H(m)	7	8	9	10
D(cm)	30	27	25	22

(;)

Bernoulli (1) → (2)

$$Z_1 + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{0} + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}}^{0} = \cancel{Z_2}^{0} + \frac{V_2^2}{2\cdot g} + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{0}$$

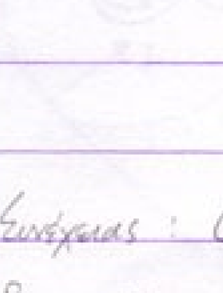
$$p_1 = p_2 = 0 \;,\; V_1 = 0$$

άρα $V_2 = \sqrt{2gH} \rightarrow Q = V_2 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \pi \cdot \frac{0{,}25^2}{4} \cdot V_2$

Συνέχειας: $Q = V_A \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}30^2}{4} = V_2 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}25^2}{4} \Rightarrow V_A = \ldots$

Bernoulli: ① → Ⓐ $\quad H = 0{,}5 + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} \Rightarrow p_A = \ldots$

Θ. ποσότητας κίνησης:



κατά x: $\rho \cdot Q \cdot (V_2 - V_A \cos 45°) = -p_A \cdot V_A \cdot \cos 45° - F_x$

$\Rightarrow F_x = \ldots$

(;)

Σ' έναν λείο κυλινδρικό αγωγό διαμέτρου D, εάν ονομάσουμε J την κλίση της γραμμής ενέργειας δείξτε ότι η ταχύτητα τριβής στο τοίχωμα U^* μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση: $\boxed{U^* = \frac{1}{2}\sqrt{gDJ}}$.

Ισχύει: $\frac{u}{u^*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \Rightarrow \frac{U^2}{U^{*2}} = \frac{8}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{8u^{*2}}{u^2}$ (1)

$J = \frac{\Delta H}{L} \rightarrow J = \lambda \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$ (2)

Αντικαθιστώ την (1) στην (2)

$J = \frac{8U^{*2}}{U^2} \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{u^* = \frac{1}{2}\sqrt{gDJ}}$

Είναι γνωστό ότι η κατανομή ταχυτήτων για τυρβώδη ροή σε λείους σωλήνες δίνεται από τη σχέση: $\frac{\bar{u}}{u^*} = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_*\cdot y}{\nu} + 5{,}5$. Έχει βρεθεί ότι μεταξύ της μέσης ταχύτητας σε μια διατομή, u, και της μέγιστης ταχύτητας στο κέντρο του αγωγού U_{max}, ισχύει η σχέση $u = U_{max} - 4{,}07u_*$. Με βάση τις 2 αυτές σχέσεις, βρείτε τη συνάρτηση που συνδέει τον συντελεστή απωλειών φορτίου λ με τον αριθμό $Re = \frac{u\cdot D}{\nu}$. Κάντε μια σύγκριση της συνάρτησης που θα βρείτε με τον γνωστό τύπο που ισχύει για λείους σωλήνες και για $Re > 10^5$.

$\lambda = f(Re)$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 5{,}75\cdot\log\frac{u_*\cdot y}{\nu} + 5{,}5 \quad (1)$$

για $y = R \rightarrow u = U_{max} - 4{,}07\cdot u_* \quad (2)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{από την (1) για } y=R:\ \bar{u}=U_{max} \rightarrow \frac{U_{max}}{u_*} = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_* R}{\nu} + 5{,}5 \\ \text{από την (2): } \frac{u}{u_*} = \frac{U_{max}}{u_*} - 4{,}07 \Rightarrow \frac{U_{max}}{u_*} = \frac{u}{u_*} + 4{,}07 \\ \frac{u}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} + 4{,}07 = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_*\cdot R}{\nu} + 5{,}5 \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_*\cdot R}{\nu} + 1{,}43 \\ Re = \frac{uD}{\nu} \text{ και } R = \frac{D}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_*\cdot\frac{D}{2}}{\nu} + 1{,}43 \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75\cdot\log_{10}\frac{u_*\cdot D\cdot u}{2\cdot\nu\cdot u} + 1{,}43$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{2}\frac{u_*}{u}\cdot Re\right) + 1{,}43 \Rightarrow \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\,Re\right) + 1{,}43$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}03\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\cdot Re\right) + 0{,}505 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}03\cdot\log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) + 2{,}03\cdot\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) + 0{,}505$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}03\cdot\log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 1{,}02$$

Ο τύπος του βιβλίου είναι: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0\cdot\log(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8$

ΑΡΑ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

Σ' ένα λείο σωλήνα βρέθηκε ότι η κατανομή των ταχυτήτων δίνεται από τη σχέση: $\frac{\bar{u}}{u} = \alpha \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^n$, όπου: $\bar{u}$: η χρονικά μέση τοπική ταχύτητα, u: η μέση ταχύτητα σε μια διατομή.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει ο νόμος του Blasius για τη συσχέτιση $\lambda = f(Re)$ και ότι η τάση τριβής στο τοίχωμα είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του σωλήνα, βρείτε το συντελεστή n.

ΛΥΣΗ

Νόμος Blasius : $\lambda = 0{,}3164 \cdot Re^{-1/4}$ για $Re \leq 10^5$

αλλά $Re = \frac{u \cdot D}{\nu}$ άρα, $\lambda = 0{,}3164 \cdot \frac{u^{-1/4} \cdot D^{-1/4}}{\nu^{-1/4}}$

Για την τριβή στο τοίχωμα ισχύει:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot u \Rightarrow \tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot u^2 \quad (2)$$

από τη σχέση που δόθηκε: $\frac{\bar{u}}{u} = \alpha \cdot \frac{y^n}{R^n} \Rightarrow u = \frac{\bar{u} \cdot R^n}{\alpha \cdot y^n}$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2) έχω:

$$\tau_0 = \frac{0{,}3164 \cdot \frac{u^{-1/4} D^{-1/4}}{\nu^{-1/4}}}{8} \cdot \rho \cdot \frac{\bar{u}^2 R^{2n}}{\alpha^2 \cdot y^{2n}}$$

αντικαθιστώ το u

$$\Rightarrow \tau_0 = \ldots = 0{,}03325 \cdot \rho \cdot \frac{\bar{u}^{7/4}}{\alpha^{7/4} \cdot \nu^{-1/4} \cdot y^{7n/4}} \cdot R^{\frac{7n-1}{4}}$$

Επειδή, όμως, η τάση τριβής στο τοίχωμα είναι ανεξάρτητη της ακτίνας R:

$$R^{\frac{7n-1}{4}} = R^0 = 1 \Rightarrow \frac{7n-1}{4} = 0 \Rightarrow n = 1/7$$

το $\bar{u}$ δεν εξαρτάται από το R

Σε λείο κυλινδρικό αγωγό, ακτίνας R, που διαρρέεται από ένα ρευστό πυκνότητας ρ και όπου η max ταχύτητα στο κέντρο του αγωγού είναι U_{max}, η κατανομή ταχυτήτων για $Re<10^5$ δίνεται από τη γνωστή σχέση $\frac{\bar{u}}{u_*} = 8{,}74 \left(\frac{u_* \cdot y}{\nu}\right)^{1/7}$. Εάν ονομάσουμε $Re_{max} = U_{max} \cdot \frac{R}{\nu}$, βρείτε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση τριβής στο τοίχωμα από μια γενική σχέση της μορφής $\tau_0 = \alpha \cdot \rho \cdot U_{max}^{\beta} \cdot Re_{max}^{\gamma}$, όπου α, β, γ αριθμητικοί συντελεστές που θα προσδιοριστούν.

ΛΥΣΗ

Η σχέση $\tau_0 \sim \rho$ που με βολεύει είναι $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u^* \Rightarrow \tau_0 = u^{*2} \rho$ (1)

για $y = R$, $\bar{u} = U_{max}$

άρα, $\frac{U_{max}}{u_*} = 8{,}74 \cdot \left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{1/7} \Rightarrow U_{max} = u_* \cdot 8{,}74 \cdot \frac{u_*^{1/7} \cdot R^{1/7}}{\nu^{1/7}}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow U_{max} = 8{,}74 \cdot \frac{u_*^{8/7} \cdot R^{1/7}}{\nu^{1/7}} \Rightarrow u_*^{8/7} = \frac{U_{max} \cdot \nu^{1/7}}{8{,}74 \cdot R^{1/7}} \\ &\text{Επειδή } Re_{max} = U_{max} \frac{R}{\nu} \Rightarrow \frac{\nu}{R} = \frac{U_{max}}{Re_{max}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$u_*^{8/7} = \frac{U_{max} \cdot U_{max}^{1/7}}{8{,}74 \cdot Re_{max}^{1/7}} \Rightarrow u_* = \frac{U_{max}}{8{,}74^{7/8} Re_{max}^{1/8}}$$

άρα, $\tau_0 = 0{,}0225 \cdot \rho \, U_{max}^2 \cdot Re_{max}^{-1/4}$

άρα,
$\alpha = 0{,}0225$
$\beta = 2$
$\gamma = -1/4$

Ένας τραχύς κυλινδρικός αγωγός μέσης τραχύτητας 9mm διαρρέεται από ρεύμα αέρα πυκνότητας 1,23 kgr/m³ και κινηματικό ιξώδες $15 \cdot 10^{-6}$ m²/sec. Σε απόσταση 2,5cm από το τοίχωμα μετρήθηκε πειραματικά μια χρονικά μέση ταχύτητα ίση με 25 m/sec. α) Υπολογίστε την τάση τριβής στο τοίχωμα - δώστε μια έκφραση υπολογισμού της χρονικά μέσης ταχύτητας σε κάθε απόσταση y από το τοίχωμα με τη μορφή $\bar{u} = A\ln y + B$, όπου A,B σταθερές που θα προσδιοριστούν.
β) Μπορούμε να εκτιμήσουμε το λ; Αν ναι, λ=; Αν όχι, τί λείπει κ' πώς θα το υπολογίζαμε τότε;

$$U_t = \frac{\bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \ln\frac{y}{\varepsilon} + B$$

Υπόθεση: έστω ότι $Re^* > 70 \Rightarrow B = 8{,}5$, όπου $Re^* = \frac{u_* \cdot \varepsilon}{\nu}$

$$\frac{25}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln\frac{0{,}025}{0{,}009} + 8{,}5 \Rightarrow \frac{25}{u_*} = 14{,}824 \Rightarrow u_* = 2{,}023 \text{ m/sec.}$$

$$Re^* = \frac{2{,}023 \cdot 0{,}009}{15 \cdot 10^{-6}} = 235 > 70$$

άρα, η υπόθεσή μας πέτυχε σωστά

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \Rightarrow \tau_0 = u_*^2 \cdot \rho = 2{,}96 \text{ Pa}$$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2{,}5 \ln\frac{y}{\varepsilon} + 8{,}5 \Rightarrow \bar{u} = 2{,}023\left[2{,}5 \cdot (\ln y - \ln 0{,}009) + 8{,}5\right]$$

$$\Rightarrow \bar{u} = 9{,}533 \ln y + 24{,}349 = A\ln y + B$$

β) $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\frac{D}{\varepsilon} + 1{,}14 \rightarrow$ μας λείπει το $\underline{D}$

ΟΡΑΤΑ ΑΣΚΗΣΗ!

Είναι γνωστό ότι για τυρβώδη ροή σε κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R, ισχύει η λογαριθμική κατανομή ταχυτήτων: $\frac{U_{max} - \bar{U}}{U_*} = 5.75 \cdot \log_{10} \frac{R}{\psi}$

Θεωρούμε ένα τραχύ αγωγό ακτίνας R=20cm και μέσης τραχύτητας 1mm που διαρρέεται από νερό παροχής Q=69,8 l/sec, ενώ βρέθηκε πειραματικά μια μέγιστη ταχύτητα $U_{max} = 95$ m/sec.

α) Σε ποια απόσταση από το τοίχωμα, η χρονικά μέση τοπική ταχύτητα γίνεται το μισό της μέγιστης;

β) Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι είναι τραχύς;

α) Θέλουμε $\bar{U} = \frac{U_{max}}{2}$

$$\frac{U_{max} - \frac{U_{max}}{2}}{U_*} = 5,75 \cdot \log \frac{0.2}{\psi} \quad (2)$$

$$\frac{U_m}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

όπου $U_m = \frac{Q}{\pi R^2} = 9$ m/sec.

και $\frac{U_m}{U_*} = 2,5 \cdot \ln \frac{D}{2\varepsilon} + 4,73 \Rightarrow U_* = 0,2932$

άρα, $(2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \log \frac{0.2}{\psi} = 2,766 \Rightarrow \psi = 2,72$ mm

β) Για να είναι ο αγωγός τραχύς θα πρέπει $Re^* > 70$

$$Re^* = \frac{U^* \cdot \varepsilon}{\nu}$$

λείπει το ν

Αν ισχύει $\frac{U_* \cdot \delta}{\nu} \simeq 5$

$\delta < \varepsilon$

Ένας λείος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R=90cm διαρρέεται από νερό. Βρείτε σε ποια απόσταση από τον άξονά του η τιμή της τοπικής ταχύτητας είναι ίση με το 90% της μέσης ταχύτητας στη διατομή; α) για στρωτή ροή

β) τυρβώδη ροή $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(\frac{\psi}{R}\right)^{2/7}$

$$\frac{U_{max}}{U_m} = 2,99$$

α) $\frac{u}{u_{max}} = 2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$, όπου $U_m = \frac{U_{max}}{9} \Rightarrow U_{max} = 9U_m$

άρα, $\frac{0,9 \cdot U_m}{9U_m} = 2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Rightarrow \underline{r = 248\ cm}$

β) $\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(\frac{\psi}{R}\right)^{2/7}$

$$\frac{U_{max}}{U_m} = 2,99$$

άρα, $\frac{0,9U_m}{2,99U_m} = \left(\frac{\psi}{R}\right)^{2/7} \Rightarrow \psi = 0,0938$

απόσταση από το τοίχωμα

$$R - \psi = 0,276m$$

Οριζόντιος αγωγός με d=10cm, L=10km, ρ=950 kg/m³, μ=0,9 Pa, Re=200…
Ισχύς=;

ΛΥΣΗ

Re=2000 → Στρωτή ροή → $\lambda \cdot Re = 64$

άρα, $\lambda = \frac{64}{2000}$

$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,9}{950} \Rightarrow \nu = 0,9105 \cdot 10^{-3}$

$Re = \frac{U_m \cdot D}{\nu} \Rightarrow U_m = 9,205$ m/sec

αλλά, $Q = U_m \cdot A = U_m \cdot \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow Q = 0,02653$ m³/sec.

$h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{U_m^2}{2g}$ → γνωστό

$h_f = h_{μανομ.}$

Ισχύς: $P = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \, h_{μανομ.}}{\eta}$;

1 ίππος = 735,75 Watt

Εξηγείστε γιατί σε μόνιμη ροή οι γραμμές ροής ταυτίζονται με τις τροχιές και γιατί από κάθε σημείο $M(x,y,z)$ περνά μία και μόνο γραμμή ροής. Δίνεται το μόνιμο πεδίο ροής με ταχύτητες:

$u=3x,\ v=4y,\ w=-7z.$

Βρείτε την εξίσωση της γραμμής ροής που περνά από το $M(2,2,3)$

ΛΥΣΗ

$u(x,y,z,t),\ v(x,y,z,t),\ w(x,y,z,t)$

Μόνιμη ροή: $\frac{\partial A}{\partial t}=0$ → άρα με ολοκλήρωση καταλήγουμε στις ίδιες ~~διαφορικές εξισώσεις~~ καμπύλες.

Από ένα σημείο του χώρου διέρχεται 1 μόριο νερού άρα περνάει μόνο μια τροχιά, άρα μόνο μια γραμμή ροής.

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \quad \text{και} \quad \frac{dx}{u}=\frac{dz}{w}$$

$$\frac{dx}{3x}=\frac{dy}{4y} \Rightarrow \frac{2}{3}\ln x = \frac{2}{4}\ln y+\ln C_2 \Rightarrow \frac{x^{2/3}}{y^{2/4}}=C_1$$

ομοίως: $x^{2/3}\cdot z^{2/7}=C_2$

→ Οι τομή των 2 επιφανειών θα δώσει μια καμπύλη

αντικαθ. $(2,2,3)$ και βρίσκω C_1, C_2

SOS και αυτό σχεδόν!

Το πεδίο ταχυτήτων μιας διδιάστατης ροής δίνεται από τη σχέση $\vec{V} = x\cdot\vec{i} - \psi\cdot\vec{j}$. α) Είναι αστρόβιλη η ροή; β) Να υπολογιστεί η εξίσωση της γραμμής ροής που διέρχεται από το σημείο $x=2$, $\psi=9$. γ) Να υπολογιστούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του ρευστού κατά x και ψ.

ΛΥΣΗ

α) $\text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial}\right.$

$- - - \quad = 0$ άρα είναι αστρόβιλη η ροή

β) γραμμής ροής: $\frac{dx}{u} = \frac{d\psi}{v} = \frac{dz}{w}$

$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{d\psi}{-\psi} \Rightarrow x\cdot\psi = c$

$x=2,\ \psi=9 \rightarrow c=9$

$x\cdot\psi = 9$

γ) $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial\psi} + w\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$

$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} = 2\cdot\vec{i}$, $\frac{\partial\vec{V}}{\partial\psi} = -2\cdot\vec{j}$, $\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} = 0$

$\vec{a} = x\cdot\vec{i} + \psi\cdot\vec{j}$

2.

Σύμφωνα με τη θεωρία του BOUSSINESQ, οι διατμητικές τάσεις τυρβώδους ροής εκφράζονται σε συνάρτηση με τον τυρβώδη συντελεστή ιξώδους μ_T.

Αν σε κυλινδρικό σωλήνα ισχύει η κατανομή ταχυτήτων $\frac{u}{u_*} = 2,5 \cdot \ln\left(\frac{u_* \cdot y}{\nu}\right) + 5,5$, όπου y η απόσταση από το τοίχωμα, βρείτε το νόμο κατανομής του συντελεστή μ_T σε συνάρτηση του y. Αν $\tau_0 = 0,9\ N/m^2$, βρείτε το λόγο μ_T/μ σε απόσταση $y = R/2$.

$$u = 2,5 \cdot u^* \cdot \ln\left(\frac{u^* \cdot y}{\nu}\right) + 5,5 \cdot u^*$$

$$\frac{du}{dy} = 2,5 \cdot u^* \cdot \frac{u^*}{\nu} \cdot \frac{\nu}{u^* \cdot y} = 2,5 \cdot \frac{u^*}{y}$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) = 0,9\left(1 - \frac{R/2}{R}\right) = \dots$$

$\rho = 1000$

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

$$\frac{\mu_T}{\mu} \simeq 240$$

στρωτή ροή → παραβολ. κατανομή ταχυτήτων

τυρβώδης ροή → λογαριθμ. " "

Θεωρούμε τη ροή με βαρύτητα στρώσης ρευστού σταθερού πάχους σε κατακόρυφη πλάκα πλάτους $B=2m$. Για παροχή $Q=20\,m^3/s$ νερού σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας, βρείτε:

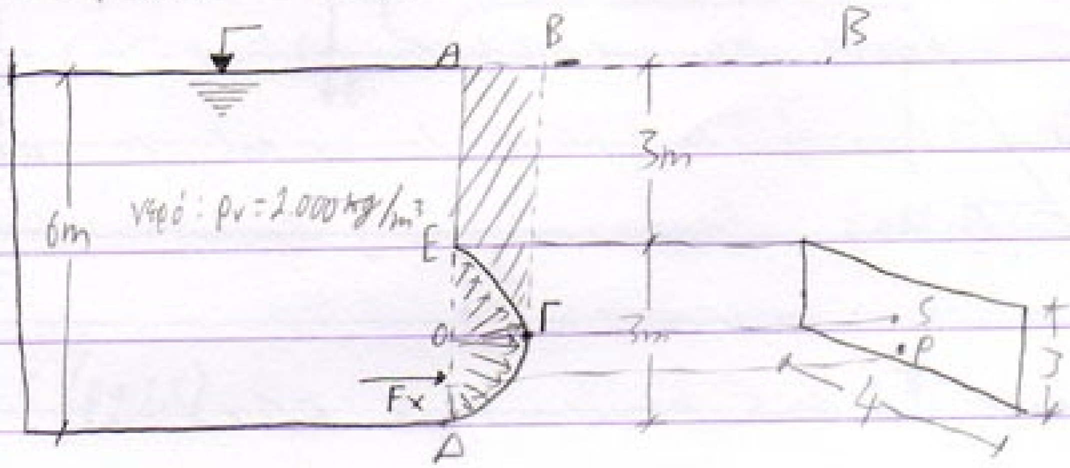
α) το είδος της ροής

β) το πάχος δ της στρώσης του ρευστού.

(Σημ.: Η στρωτή υποστοιβάδα σχηματίζεται για $y^+ = \frac{u^* \cdot y}{\nu} < 2t$

$$\left.\begin{aligned} Re &= \frac{U \cdot \delta}{\nu} \\ U &= \frac{Q}{B \cdot \delta} \end{aligned}\right\} \quad Re = \frac{Q}{B \cdot \nu} > 2000 \rightarrow \text{τυρβώδης}$$

Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στην ημικυκλική θυρίδα b=4m



$h_S = (3+2,5) = 4,5m$

$p_S = \gamma \cdot h_S = 9,81 \cdot 1000 \cdot 4,5\ Pa$

$F_\sigma = p_S \cdot F = 9,81 \cdot 1000 \cdot 4,5 \cdot 3 \cdot 4 = 529.740N$

$F_x = F_\sigma = 529.740N$

$F_{κάτω} = \gamma_v \ V(ΑΒΓΔΕΑ) = \rho \cdot g \left[3 \cdot 2,5 \cdot 4 + \frac{\pi \cdot 3^2}{8} \cdot 4 + \frac{\left(3 \cdot 2,5 - \frac{\pi \cdot 3^2}{8}\right)}{2} \cdot 4\right]$

$= 472.900,86N$

$F_{άνω} = \gamma \cdot V(ΑΒΓΕΑ) = \rho \cdot g \cdot (3 \cdot 2,5 \cdot 4 + 2,932) = 295.532,99N$

$F_y = F_{κάτω} - F_{άνω} = \frac{277.367,94}{2} N$ ή $F_y = 9,81 \cdot 1000 \cdot 4 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $\quad εφθ = \frac{F_y}{F_x}$

$y_S = (BS) = 4,5m$

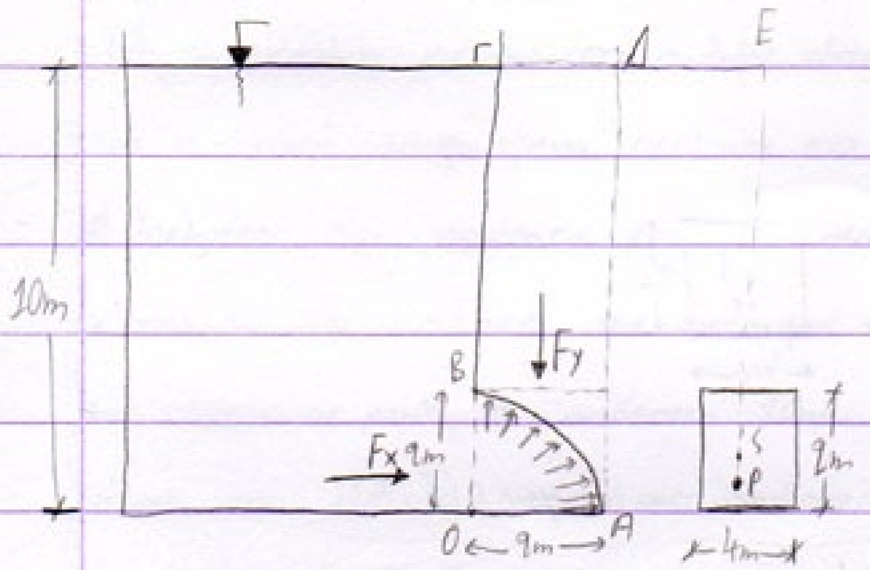
$(BP') = y_P = \frac{I_{xS}}{y_S \cdot F} + y_S = \frac{\frac{1}{12} \cdot 3^3 \cdot 4}{4,5 \cdot 3 \cdot 4} + 4,5 = 4,667m$

$M_O = 0 \Rightarrow F_x \cdot \left[(BP') - (BS)\right] - F_y \cdot x = 0$

$\Rightarrow x = 0,638m$

Πρίαμος
6976054088

Να βρεθεί η δύναμη και το σημείο εφαρμογής της στην καμπύλη επιφάνεια με $b=4m$.



ΛΥΣΗ

Υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης (F_x).

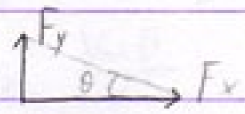
$h_s = 8+1 = 9m$ $\qquad p_s = \gamma h_s = \rho \cdot g \cdot h_s = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 9 = 88.290\ Pa$

$F_\delta = p_s \cdot E = 88.290 \cdot 9 \cdot 4 = 706.320N$ $\qquad F_x = F_\delta = 706.320\ N$

Υπολογισμός κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης (F_y)

$$F_{\alpha\nu\omega} = F_y = \gamma \cdot V = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot \left[9 \cdot 8 \cdot 4 + \left(9 \cdot 9 - \frac{\pi \cdot 9^2}{4}\right)4\right]$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\nu\omega} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot (64 + 3{,}434) = - - - \ N$$



$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ $\qquad \varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_y}{F_x}$

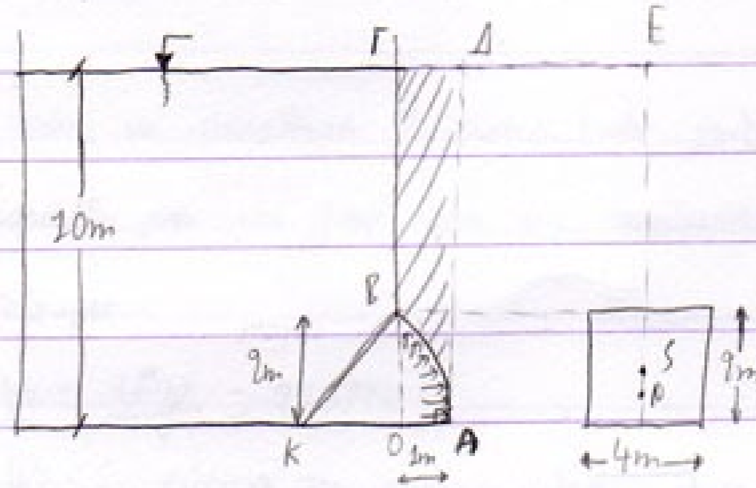
$y_s = (ES) = 9m$ $\qquad (EP) = y_p = \dfrac{I_{xs}}{y_s \cdot E} + y_s = \dfrac{\frac{1}{12} \cdot 9^3 \cdot 4}{9 \cdot 9 \cdot 4} + 9 = 9{,}037m$

$M_o = 0 \Rightarrow F_x \cdot (10 - 9{,}037) - F_y \cdot x = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1{,}0282\ m$

ΠΟΛΥ ΚΑΛΗ !

Να βρεθεί η συνολική δύναμη στην καμπύλη και το σημείο εφαρμογής της ($b=4m$).



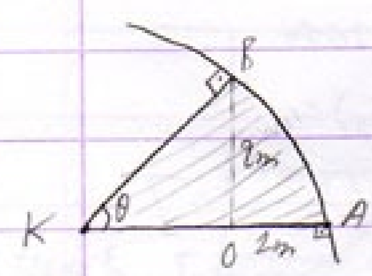
Υπολογισμός της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης (F_x)

$h_s = 8+1 = 9m$, $p_s = \gamma h_s = \rho g h_s = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 9 = 88.290 Pa$

$F_\delta = p_s E = 88290 \cdot 2 \cdot 4 = 706.320N$, $F_x = F_\delta = 706.320N$

Υπολογισμός κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης (F_y).

$F_{πάνω} = F_y = \gamma V = \rho g \cdot [8 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - E_{AOB}]$



$KB = \sqrt{2^2 + (KB-1)^2}$

$KB^2 = 4 + KB^2 + 1 - 2KB$

$\Rightarrow 2KB = 5 \Rightarrow KB = 2{,}5m$

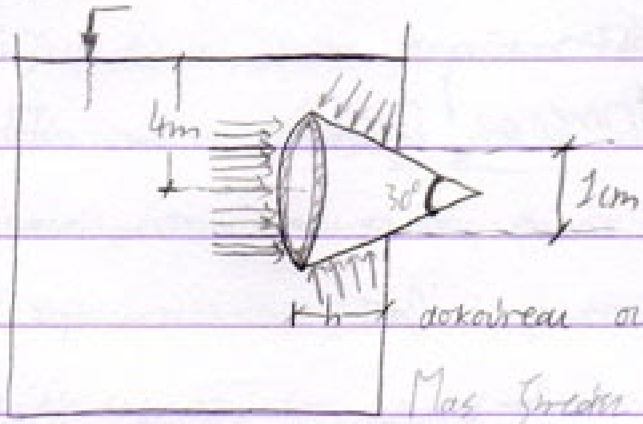
$OK = KB - 1 = 1{,}5m$

$εφθ = \frac{2}{OK}$

$E_{KAB} = \frac{\pi \cdot KB^2 \cdot \theta}{360}$

$E_{AOB} = E_{KAB} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (OK)$

α) Να βρείτε αν η οριζόντια δύναμη που ασκείται στη σφήνα είναι ανεξάρτητη του h. β) Για h=α να βρείτε την οριζόντια δύναμη που ασκείται.



Λύση

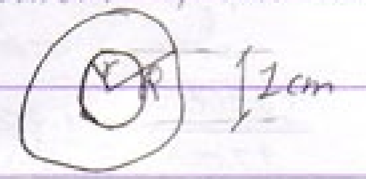
Πρώτο βήμα είναι να βάλουμε τα βέλη για να δείξουμε πως ασκούνται οι υδροστατικές πιέσεις στη σφήνα. Μας ζητείται την οριζόντια μόνο. Έχουμε βέλη και προς τις δύο κατευθύνσεις.

(F_δ)

"βλέπουν.. σαν προβολή τον κύκλο της βάσης της σφήνας (ακτίνας R)

(F_α)

"βλέπουν.. σαν προβολή δακτύλιο



Επειδή οι πιέσεις υπολογίζονται από το ίδιο βάθος (4m), έχουμε δηλαδή μια ενιαία στάθμη και από τις δύο πλευρές της σφήνας, μπορώ να αφαιρέσω τις προβολές, οπότε η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα δεξιά και ασκείται σε ~~[illegible]~~ επιφάνεια της οποίας η κατακόρυφη προβολή είναι κύκλος διαμέτρου 1cm.

$h_s = 4m \qquad p_s = \gamma \cdot h_s = 4 \cdot \gamma$

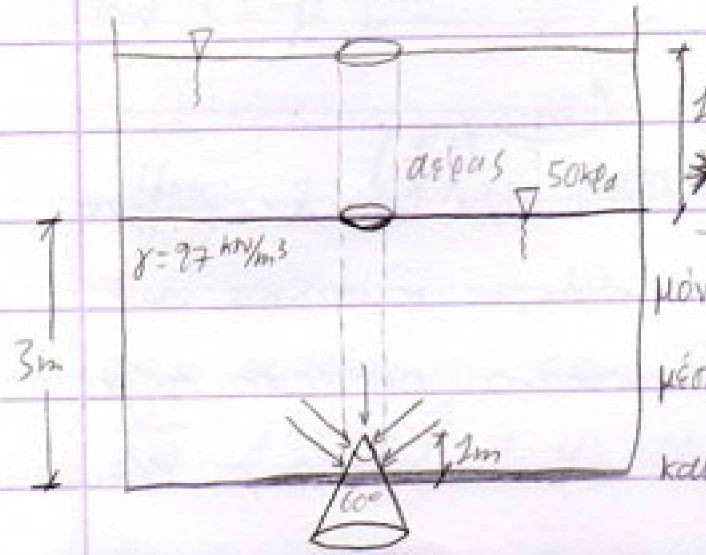
$F_\delta = p_s \cdot \pi R^2 = 4\gamma \cdot \pi R^2$

$F_\alpha = 4 \cdot \gamma \cdot [\pi R^2 - \pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-2})^2]$

$F_x = F_\delta - F_\alpha = 4\gamma\pi \cdot (0{,}5\,10^{-2})^2 \, N$ ανεξάρτητη του α.

$$R = \varepsilon\varphi 15^\circ \cdot \left(h + \frac{0{,}5\,10^{-2}}{\varepsilon\varphi 15^\circ}\right)$$

Ζητείται η συνολική δύναμη που ασκείται στη σφήνα και το σημείο εφαρμογής της. Δίνεται: $V_{κώνου} = \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ r: ακτίνα βάσης κώνου, h: ύψος κώνου



* ΠΡΟΣΟΧΗ! Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το τμήμα του κώνου που βρίσκεται μέσα στο υγρό. Άρα, r: ακτίνα αυτής και h = 2m

Οι πιέσεις που δουλεύουμε είναι πάντα σχετικές:

$p_{σχ.} = p_{abs} - 1,013\cdot 10^5$ (απόλυτη, ατμοσφαιρική) $\quad$ 1bar = 10^5 Pa

$h_{ισ.}: \frac{50.000}{27.000} = 1,852m$

* Προσοχή! Εδώ το γ μας δίνεται ολόκληρο και δεν πρέπει να το υπολογίσουμε ως ρ·g.

Αφού δημιουργήσαμε ανοιχτή δεξαμενή θα γράψουμε τα βάρη πάνω στη σφήνα. Οι οριζόντιες δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται. Κατακόρυφες δυνάμεις: $F_y = \gamma V = \gamma \cdot [V_{κυλίνδρου} - V_{κώνου}]$

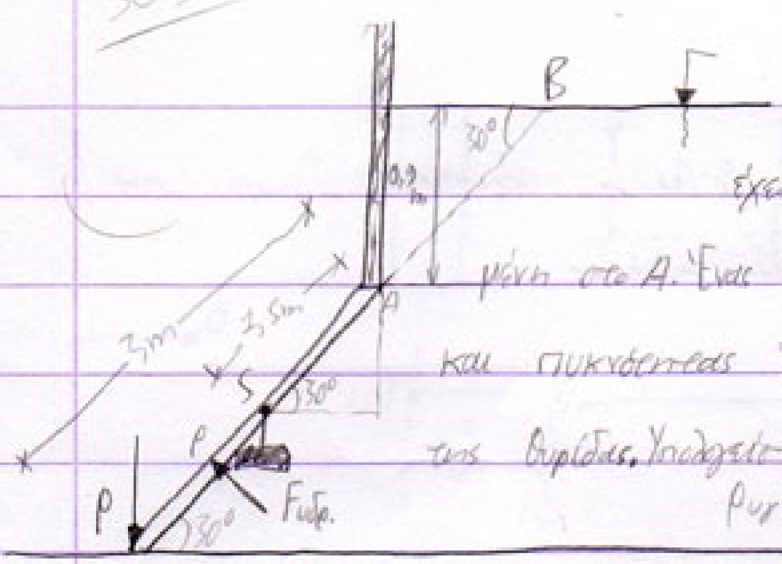
$= 27.000\ [\pi r^2 (3 + 1,852) - \frac{2}{3}\cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2]$

$= 27.000\ (\pi \cdot εφ^2 30° \cdot 4,852 - \frac{2}{3}\cdot \pi \cdot εφ^2 30)$

$= 27.000\ (5,081 - 0,349) =$

Η κατακόρυφη δύναμη εφαρμόζεται στον άξονα του κώνου για λόγους συμμετρίας.

SOS !!!!!



Η ορθογωνική θυρίδα του σχήματος έχει πλάτος 0,9m και είναι αρθρωμένη στο Α. Ένας τσιμεντένιος ογκόλιθος 0,225 m^3 και πυκνότητας 2.400 kgr/m^3 συνδέεται στο κέντρο βάρους της θυρίδας. Υπολογίστε την ελάχιστη δύναμη P που απαιτείται για να παραμείνει η θυρίδα κλειστή. Το βάρος της θυρίδας θεωρείται αμελητέο.

ΛΥΣΗ

Η τάση του νήματος, λοιπόν, θα είναι το βάρος του ογκόλιθου μειωμένο κατά την άνωση.

$$T = B - A = V \cdot γ_{ογκολίθου} - V γ_{υγρού} = V \cdot (γ_{ογκ.} - γ_{υγρ.})$$

αντικαθιστώντας, έχουμε: $T = 0,225 \cdot (2400 - 900) \cdot 9,81 = 3.310,88 N$

Υδροστατική: $h_s = 0,9 + 1,5 \cdot \sin 30° = 1,65 m$

$$p_s = γ \cdot h_s = 900 \cdot 9,81 \cdot 1,65 = 14567,85\ Pa$$

$$F = p_s \cdot E = 14567,85 \cdot 3 \cdot 0,9 = 39333,195 N$$

$$y_s = (BS) = (BA) + (AS) = 1,5 + \frac{0,9}{\sin 30°} = 3,3 m$$

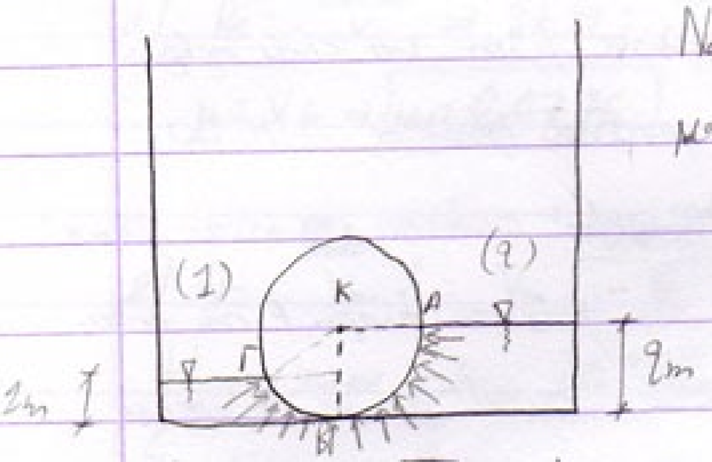
$$y_p = \frac{I_{xs}}{y_s \cdot E} + y_s = \frac{\frac{1}{12} \cdot 0,9 \cdot 3^3}{3,3 \cdot 0,9 \cdot 3} + 3,3 = 3,527 m$$

$$(PA) = 3,527 - \frac{0,9}{\sin 30°} = 1,727 m$$

Η θυρίδα περιστρέφεται γύρω από το **A**.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_{υδρ}\,(PA) - T \cdot 1,5 \cdot \cos 30° - P \cdot 3 \cdot \cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow P = 24.490,224 N$$



Να βρεθεί η υδροστατική δύναμη ανά μονάδα πλάτους.

δεξιά: $1\square_{2}$ $h_s = 0{,}5m$, $p_s = 9{,}81 \cdot 1.000 \cdot 0{,}5 = 4905\ Pa$

$F_\delta = p_s E = 4905 \cdot 1 \cdot 1 = 4905\ N$

αριστερά: $\square^{2}_{2}$ $h_s = 1m$

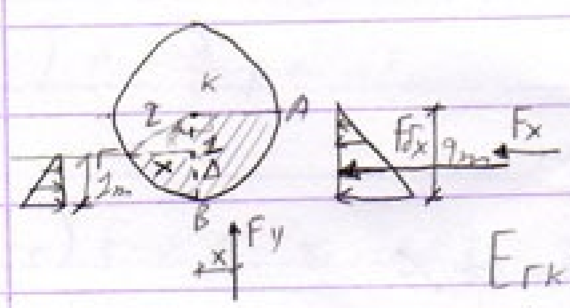
$p_s = 9{,}81 \cdot 1.000 \cdot 1 = 9810\ Pa$

$F_\sigma = p_s \cdot E = 9810 \cdot 2 \cdot 1 = 19620\ N$

$F_x = F_\alpha - F_\delta = 19620 - 4905 = 14.715\ N$

· Κατακόρυφη δύναμη

Τα κατακόρυφα βέλη βλέπουν μόνο προς τα πάνω. Οι κατακόρυφες δυνάμεις ασκούνται στις επιφάνειες ΑΒ και ΒΓ.



$\overset{\triangle}{\Gamma K\Delta}: 2^2 = 1^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

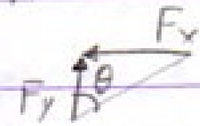
$\hat{K}: \varepsilon\varphi K = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \hat{K} = 60^\circ$

$E_{\Gamma KB} = \frac{\pi R^2 60}{360} = \frac{\pi 4}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$F_{\delta\,\acute{\alpha}\nu\omega} = \gamma \cdot V_{\Gamma\Delta B\Gamma} = \gamma \cdot (V_{\Gamma KB} - V_{\Gamma\Delta K}) = 9810 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12050{,}307\ N$

$F_{\alpha\,\acute{\alpha}\nu\omega} = \gamma \cdot V_{KABK} = \gamma \cdot \frac{\pi R^2}{4} = 9.810 \cdot \pi = 30.819{,}024\ N$

$F_y = F_{\delta\,\delta\iota\alpha\nu} + F_{a\,\delta\iota\alpha\nu} = 49.869,332\,N$



$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 45.394,505\,N$

$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_y}{F_x} = 2,923$

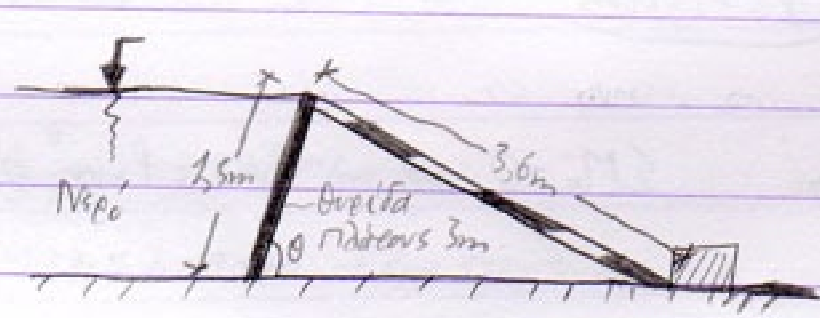
Σημείο εφαρμογής του F_x : $F_{\delta_x} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - F_{d_x} \cdot \left(\frac{2}{3} + 2\right) = F_x \cdot y$

$\Rightarrow \quad y = 1,222m$

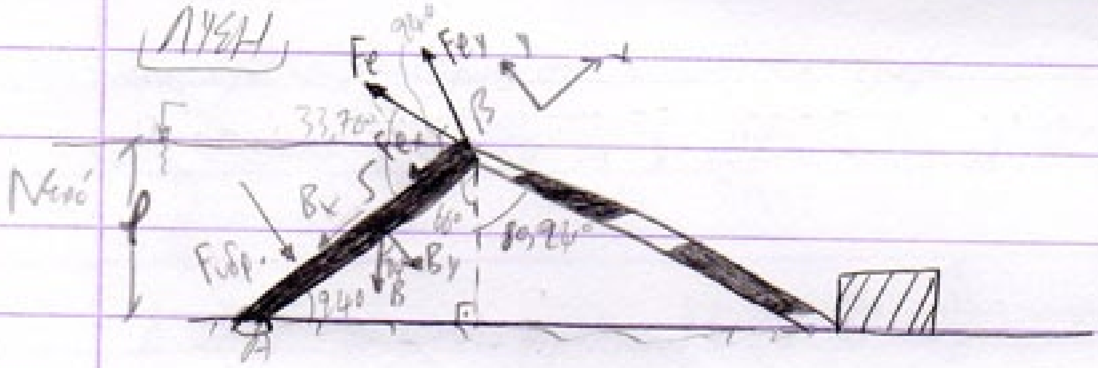
Επίσης $\quad \Sigma M_K = 0 \Rightarrow \quad F_y \cdot x = F_x \cdot y \Rightarrow x = 0,495m$

Μία θυρίδα 890N, πλάτους 3m και μήκους 2,5m είναι αρθρωμένη στο σημείο A και ισορροπεί στη θέση του σχήματος με μια ράβδο μήκους 3,6m. α) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκεί η ράβδος στη θυρίδα (Η διεύθυνσή της θεωρείται κατά μήκος της ράβδου). β) Υπολογίστε την παραπάνω δύναμη εάν το βάρος της θυρίδας θεωρηθεί αμελητέο και η γωνία θ τείνει στο μηδέν.

Έστω $\theta = 24°$



ΛΥΣΗ



$$h_s = \frac{1,5}{2} \cdot ημ24° = 0,305m$$

$$p_s = \gamma \cdot h_s = ---$$

$$F_{υδρ.} = p_s \cdot F = 23.464,995N$$

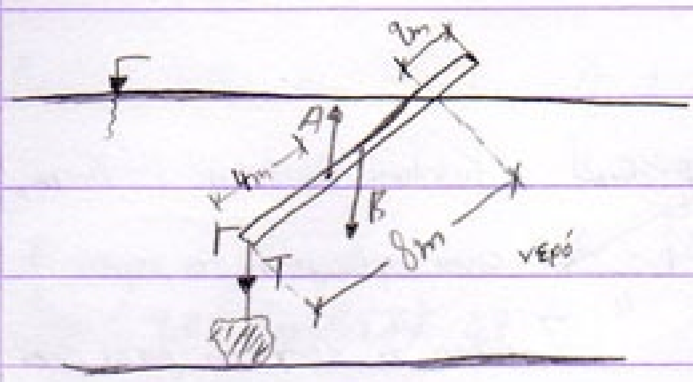
$$y_s = (BS) = 0,75m$$

$$y_p = \frac{\frac{1}{12} \cdot 2,5^3 \cdot 3}{0,75 \cdot 2,5 \cdot 3} + 0,75 = 1m$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_{υδρ.} \cdot 0,5 + \overset{= B \cdot \cos 24°}{B_y}\, 0,75 = \overset{= Fe \cdot \cos 50,24°}{F_{ey}}\, 1,5$$

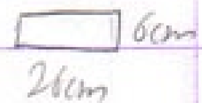
$$\Rightarrow Fe = 8807,78N$$

β) Για $\theta \to 0$ → F περνάει από A και $\Sigma M_A = 0$ → τέλεια για F, δεν μπορούμε να βρούμε την Fe!



$\rho_{ράβδου} = ;$

τάση νήματος = ;



Δεν έχουμε άρθρωση, για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται όλες οι συνθήκες ισορροπίας.

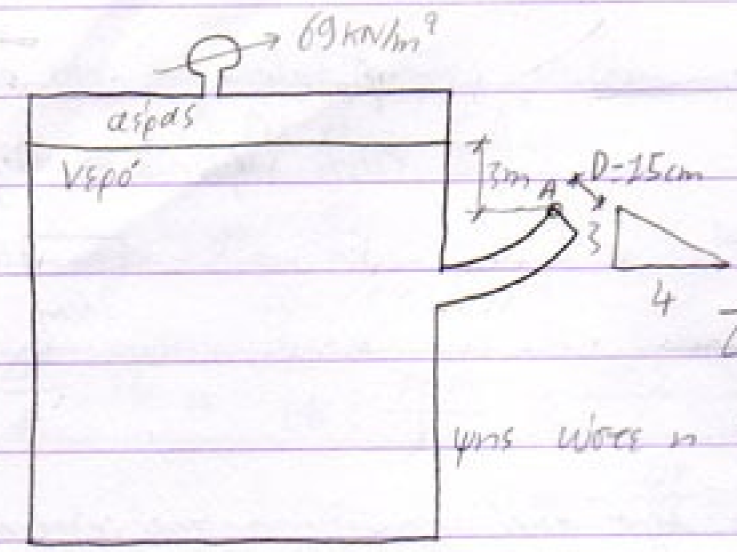
Έχουμε όγκο, δηλαδή έχουμε ένδειξη για άνωση

$$T+B=A \Rightarrow T + 0{,}06\cdot 0{,}26\cdot 10\cdot \rho\cdot g = 0{,}06\cdot 0{,}26\cdot 8\cdot 1000\cdot 9{,}81 \quad (1)$$

$$\Sigma M_\Gamma = 0 \Rightarrow 0{,}06\cdot 0{,}26\cdot 8\cdot 1000\cdot 9{,}81\cdot 4\cdot συνθ = 0{,}06\cdot 0{,}26\cdot 10\cdot \rho\cdot g\cdot 5\cdot συνθ$$
$$\Rightarrow \rho\cdot g = 6278{,}4\ kg/m^3$$

$$(1) \Rightarrow T = 250{,}682\,N$$

ΠΟΛΥ ΚΑΛΟ!



Κυκλική θυρίδα με D=25cm, είναι αρθρωμένη στο σημείο A. Ζητείται η ελάχιστη ροπή στρέψης ώστε η θυρίδα να παραμένει κλειστή.

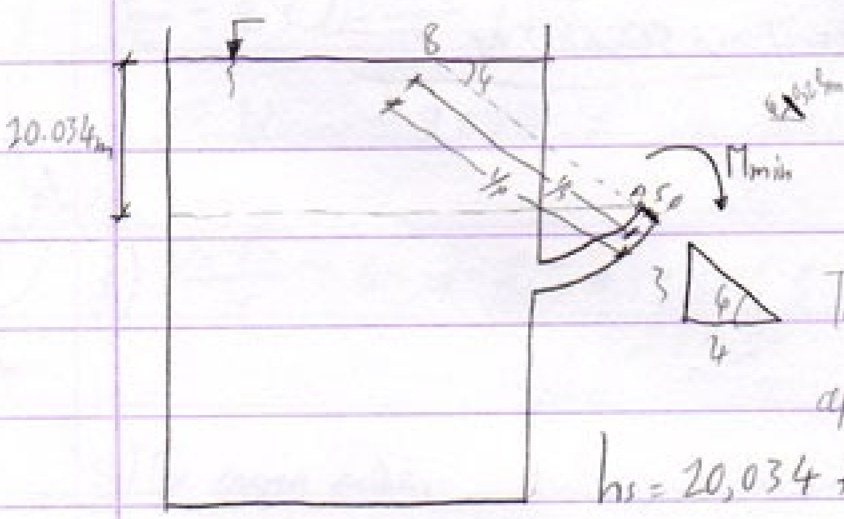
ΛΥΣΗ

Έχουμε άρθρωση στο A → $\Sigma M_A = 0$ για να κρατηθεί η θυρίδα κλειστή.
Αέρας με πίεση 69 kN/m² → Πρέπει να βρούμε το ισοδύναμο ύψος για να έχουμε ανοικτή δεξαμενή.

69 kN/m² = 69000 Pa

$h_{ισοδύναμο} = \frac{p_0}{\gamma} = \frac{69000}{\rho \cdot g} = \frac{69000}{9{,}81 \cdot 1.000} = 7{,}034m$

$h_{ολικό} = h_0 + h_{ισ.} = 20{,}034m$



$εφφ = \frac{3}{4} \Rightarrow φ = 36{,}87°$

$ημφ = 0{,}6 \quad συνφ = 0{,}8$

Το βάρος της θυρίδας θεωρείται αμελητέο.

$h_s = 20{,}034 + \frac{ημ36{,}87 \cdot 0{,}25}{2} = 20{,}079m$

$p_c = \gamma \cdot h_s = 9.810 \cdot 20{,}079 = 98.874{,}99 \text{ Pa}$

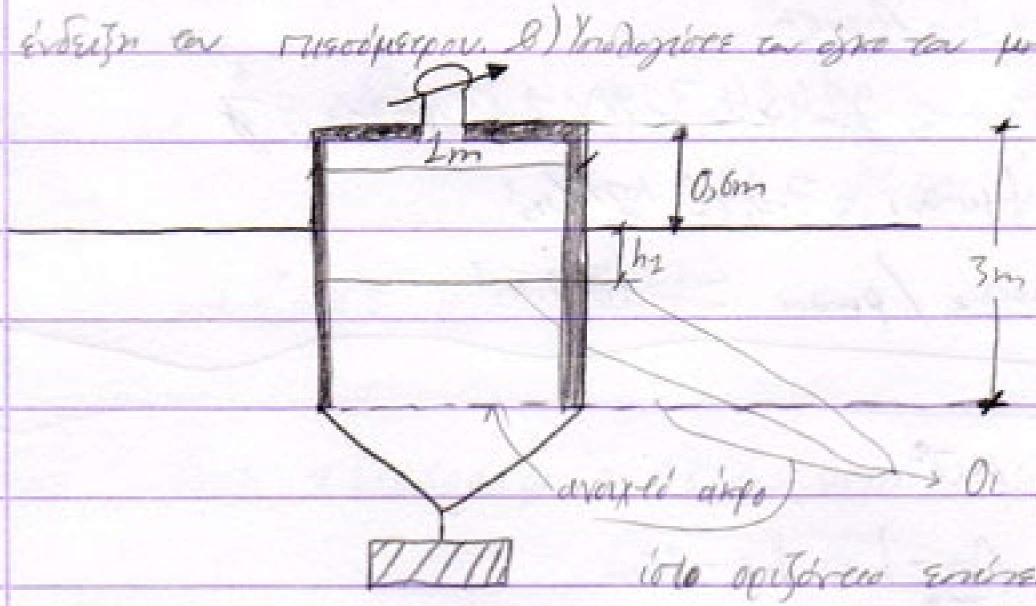
$F_{υδρ.} = p_c \cdot S = 98.874{,}99 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}25}{2}\right)^2 = 2.747{,}915N$

Σημείο εφαρμογής: $\sin φ = \frac{h_s}{BS} \Rightarrow BS = \frac{20{,}079}{0{,}6} = 26{,}798 m$

$y_s = BS \qquad y_p = \frac{I_{xc}}{y_s \cdot E} + y_s = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{26{,}798 \cdot \pi R^2} + 26{,}798 = 26{,}7983m$

$M_{min} - (0{,}075 + 0{,}0003) \cdot F_{υδρ.} = 0 \Rightarrow M_{min} = 232{,}57 N \cdot m$

Μια κυλινδρική δεξαμενή μάζας 90kgr, διαμέτρου D=1m και ύψους 3m είναι ανοιχτή στο κάτω άκρο. Βυθίζεται σε νερό και ισορροπεί στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, με τη βοήθεια ενός σιδερένιου μπλοκ πυκνότητας $\rho_{μπλοκ} = 7840\ kgr/m^3$. Κατά τη διαδικασία της βύθισης το γινόμενο $p \cdot V$ είναι σταθερό, όπου p η απόλυτη πίεση του αέρα στη δεξαμενή και V_0 ο όγκος του αέρα. α) Προσδιορίστε την ένδειξη του πιεσόμετρου. β) Υπολογίστε τον όγκο του μπλοκ.



Οι πιέσεις στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός και εκτός του κυλίνδρου είναι ίσες.

ΛΥΣΗ

Αρχικά (για τον αέρα)

V_0 : όγκος κυλίνδρου : $\pi R^2 \cdot l = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot 3 = 2,356\ m^3$

p_0 : 10^5 Pa (ατμοσφαιρική)

Τελικά για τον αέρα

$p_{a(h_2)}$: $h_2 \cdot \gamma + 10^5$ → ατμοσφαιρική

$V_a = \pi R^2 (0,6 + h_2) = \pi \cdot (0,5)^2 \cdot (0,6 + h_2)$

όμως είναι: $p_0 \cdot V_0 = p_a \cdot V_a \Rightarrow 235600 = (9810 h_2 + 10^5)(0,472 + 0,785 h_2)$

$\Rightarrow h_2 = 2,9245m$

$p_A = 1{,}3345 \cdot 9820 + 10^5 = 228.879\ kN/m^2$

β) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_A + B_K + B_{μολυβδ.} = 0$ (1)

i) ανωστική δύναμη: $p_A (\text{επιφ. } AB) = 228.879{,}345 \cdot \pi (0{,}5)^2$
$= 93.367{,}039 N$

ii) βάρος κυλίνδρου: $mg = 90 \cdot 9{,}82 = 883{,}9 N$

iii) βάρος μολυβδ.: - Άνωση

(1) $\Rightarrow B_{μολυβδ.} = 92484{,}729 N \rightarrow m_{μολυβδ.} = \frac{B}{g}$

$\rho_{μολυβδ.} = 7.840\ kg/m^3$

$V_{μολυβδ.} = m_{μολυβδ.} / \rho_{μολυβδ.} = 1{,}202\ m^3$

(συνέχεια)

$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot \bar{U}^2$

$\Delta z = h_{f2} = h_{f1} = 90m$

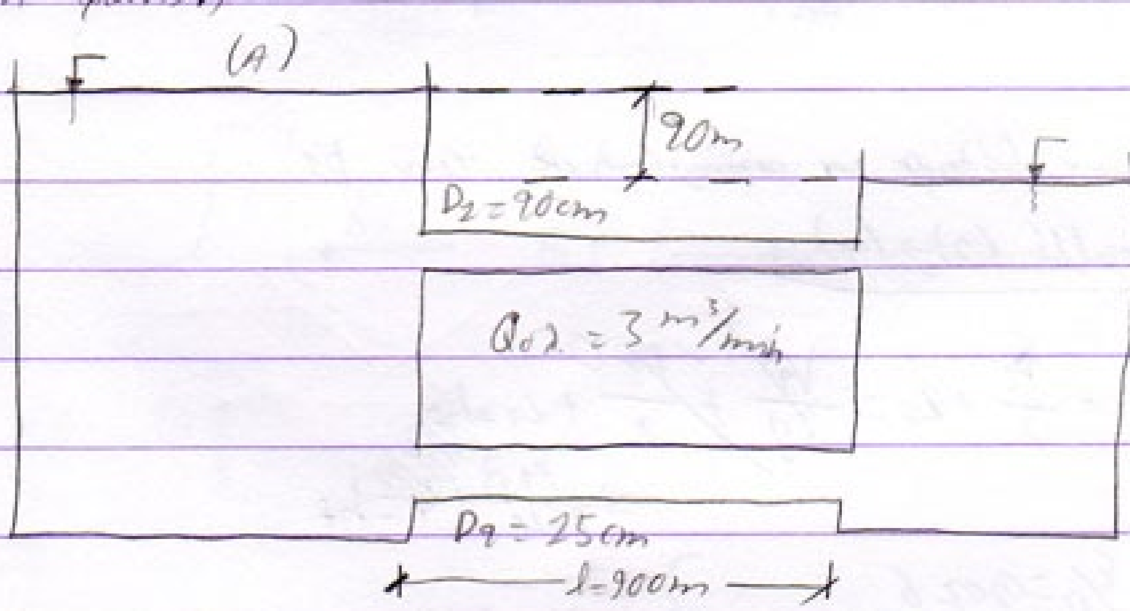
$h_{f2} = \lambda_2 \frac{l}{D_2} \frac{\bar{U_2}^2}{2g} \Rightarrow 90 = \lambda_2 \bar{U_2}^2 \frac{900}{0{,}7 \cdot 2 \cdot 9{,}82} \Rightarrow \lambda_2 \cdot \bar{U_2}^2 = 0{,}0879$

ομοίως $\lambda_1 \cdot \bar{U_1}^2 = 0{,}0654$

άρα $\tau_{02} = \frac{0{,}0879 \cdot 2000}{8} = 20{,}9\ N/m^2$

$\tau_{01} = \frac{0{,}0654 \cdot 2000}{8} = 8{,}775\ N/m^2$

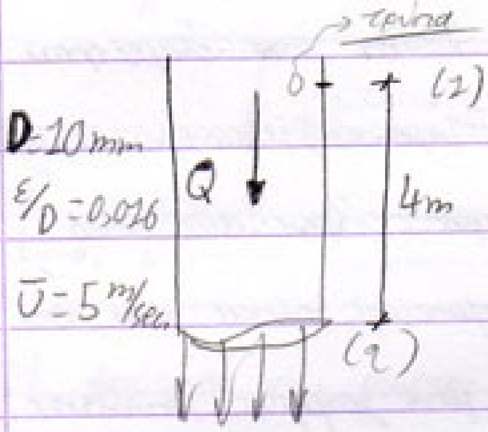
Δύο παράλληλοι σωλήνες του ίδιου μήκους 900m και διαμέτρου $D_1 = 20cm$ και $D_2 = 25cm$, συνδέουν δύο δεξαμενές, μεταφέροντας συνολική παροχή $Q_{ολ} = 3\ m^3/min$. Αν η διαφορά στάθμης των δύο δεξαμενών είναι 20m, υπολογίστε τις διατμητικές τάσεις στα τοιχώματα των δύο σωλήνων. Λάβετε υπόψη μόνο γραμμικές απώλειες και σταθερό συντελεστή τριβής για τους δύο σωλήνες.
(Προσοχή!: Δε σημαίνει ότι οι δύο αγωγοί έχουν ίδιο συντελεστή τριβής.)



ΛΥΣΗ

- Η διαφορά στάθμης μεταξύ των δύο δεξαμενών αντικατοπτρίζει τη διαφορά ενέργειας μεταξύ τους, που είναι 20m.
- Η διαφορά ενέργειας μεταξύ τους ισούται με το άθροισμα των γραμμικών απωλειών στους 2 σωλήνες.

ΕΞΥΠΝΗ



Σε απόσταση 4m από την έξοδο ανοίγουμε μια τρύπα. Θα βγει νερό ή θα μπει αέρας;

ΛΥΣΗ

① Αν $p_{οχετ} > 0$ (στην οπή) θα βγει νερό

② Αν $p_{οχετ} < 0$ (-ιι-) θα μπει αέρας

Ουσιαστικά θέλουμε να υπολογίσουμε την p_1

Bernoulli (1)→(2)

$$\cancel{\frac{V_1^2}{2g}} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + \cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{0} + z_2 + h_f$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{9810} + 4 = h_f$$

από $\varepsilon/D = 0{,}026$ και $Re = \frac{\bar{U} \cdot D}{\nu} = 50.000$ $\Big\} \Rightarrow \lambda = 0{,}045$

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{D} \cdot \frac{\bar{U}^2}{2 \cdot g} = \ldots$$

άρα, $p_1 = 785{,}60\ Pa > 0$

άρα στην οπή θα βγει νερό

Σύμφωνα με τη θεωρία BOUSSINESQ, οι διατμητικές τάσεις τυρβώδους ροής εκφράζονται σε συνάρτηση με τον τυρβώδη συντελεστή ιξώδους μ_T. Αν σε κυλινδρικό σωλήνα ισχύει η κατανομή ταχύτητας:

$$\frac{u}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{u_* \cdot y}{\nu}\right) + 5{,}5$$

, όπου y η απόσταση από το τοίχωμα, βρείτε το νόμο κατανομής του συντελεστή μ_T σε συνάρτηση του y. Αν $\tau_0 = 0{,}2\,N/m^2$, βρείτε το λόγο μ_T/μ σε απόσταση $y = R/2$.

ΛΥΣΗ

$$u = 2{,}5 \cdot u^* \cdot \ln\left(\frac{u^* \cdot y}{\nu}\right) + 5{,}5 \cdot u^*$$

$$\frac{du}{dy} = 2{,}5 \cdot u^* \cdot \frac{\nu}{u^* \cdot y} \cdot \frac{u^*}{\nu} = 2{,}5 \frac{u^*}{y}$$

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{R}\right) = 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{R/2}{R}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$$

$$\tau = \mu_T \cdot \frac{du}{dy} = 2{,}5 \frac{u^*}{y} \mu_T$$

άρα $\dfrac{\mu_T}{\mu} \simeq 240$

γιατί $u^* = \sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}}$, όπου $\rho = 1.000$ και $\mu = 10^{-3}$

$$\frac{\tau}{\tau} = \frac{0{,}1}{\mu_T \cdot 2{,}5 \cdot \frac{u^*}{y}} \Rightarrow \mu_T \cdot 2{,}5 \cdot \frac{u^*}{y} = 0{,}1$$

Θεωρούμε την ροή με βαθμίδα στρώσης ρευστού σταθερού πάχους σε κατακόρυφη πλάκα πλάτους $B=2m$. Για παροχή $Q=10\ m^3/s$ νερού σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας, βρείτε:

α) το είδος της ροής

β) Το πάχος δ της στρώσης του ρευστού.

Σημ. (Η στρωτή υποστοιβάδα σχηματίζεται για $y^+ = \frac{u^* \cdot y}{\nu} < 11$.

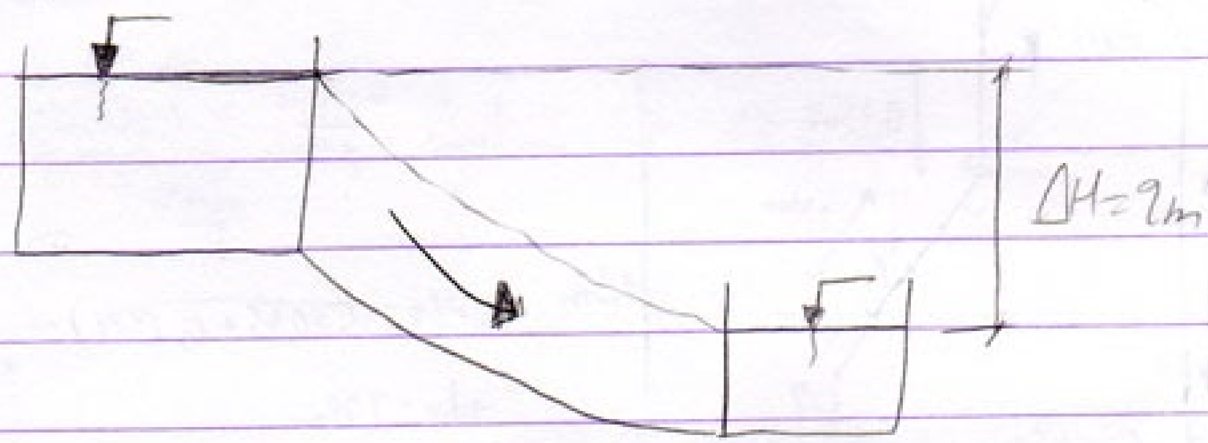
$$\left.\begin{array}{l} Re = \frac{V_m \cdot \delta}{\nu} \\ \\ V_m = \frac{Q}{B \cdot \delta} \end{array}\right\} \Rightarrow Re = \frac{Q}{B \cdot \nu} > 2000$$

$\downarrow$

τυρβώδης ροή!

β) $\frac{u}{u^*} = A \cdot \ln \frac{u^* \cdot y}{\nu} + B$

Βρείτε την παροχή Q μεταξύ δύο δεξαμενών διαφοράς στάθμης 9m που συνδέονται με σωλήνα μήκους 20m και διαμέτρου 10cm: α) αγνοώντας τις τοπικές απώλειες και θεωρώντας $\lambda \simeq 0{,}03$. β) Λαμβάνοντας υπόψη τις τοπικές απώλειες με συντελεστή $k=0{,}5$ στην είσοδο και $k=1$ στην έξοδο.



ΔH : απώλεια ενέργειας (τριβής) $= \dfrac{\lambda}{D} \cdot L \cdot \dfrac{V^2}{2g} = \dfrac{\lambda \cdot L}{D} \cdot \left(\dfrac{V^2}{2g}\right)$

$\Rightarrow V = \ldots \qquad Q = \dfrac{\pi D^2}{4} \cdot V = 28{,}7 \ l/s$

Αν αυξηθούν οι απώλειες με τοπικά εμπόδια μειώνεται η Q.

$\Delta H_{τοπικό} = k \dfrac{V^2}{2 \cdot g}$

$\Delta H = \left(k_1 + k_2 + \dfrac{\lambda \cdot L}{D}\right) \cdot \dfrac{V^2}{2 \cdot g} \Rightarrow Q = 23{,}4 \ l/s$

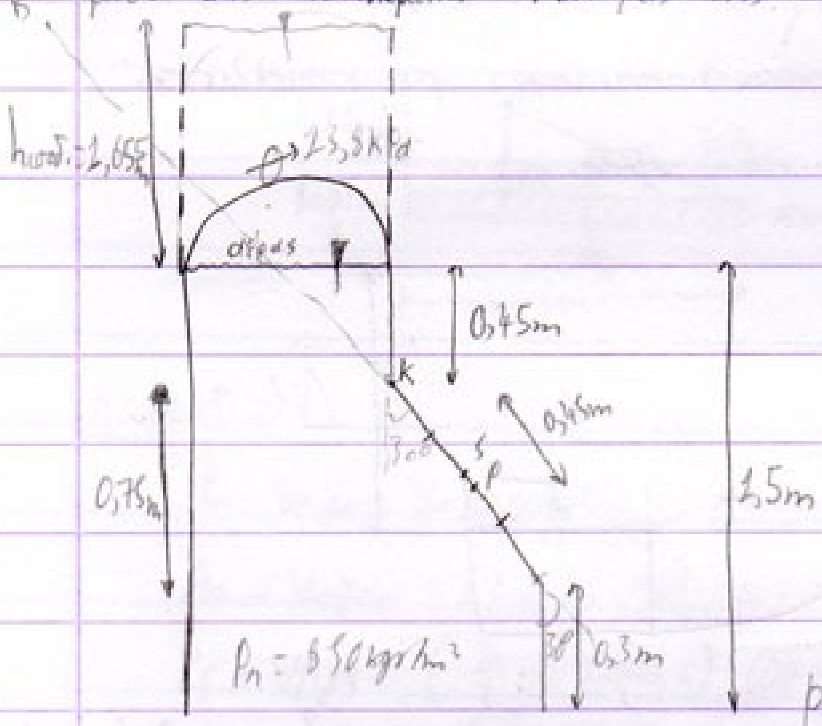
$\lambda = \lambda_1 \rightarrow Q_1 \rightarrow Re = \dfrac{V_1 D}{\nu} \xrightarrow{Moody} \lambda_2$

$\lambda_2 \rightarrow Q_2 = \ldots = B \cdot \nu \left[\delta^+ (2{,}5 \ln \delta^+ + 3) - 38{,}6\right]$

Αν $\delta \geq 141 \Rightarrow \dfrac{u^* \delta}{\nu} \Rightarrow \delta = 2{,}5 \cdot \ln \delta_i + 3$ $\qquad \delta_i = \dfrac{Q/B \cdot \nu + 38{,}6}{2{,}5 \cdot \ln \delta_i + 3}$

i	δ_i	δ_{i+1}
1	200	242
2	242	242

Υπολογίστε το μέγεθος και το σημείο εφαρμογής της δύναμης που ασκεί-ται στη θυρίδα διαμέτρου 0,45m του σχήματος. Η θυρίδα βρίσκεται στο μέσο της κεκλιμένης πλευράς της δεξαμενής.



$$h_{ισοδ.} = \frac{p_0}{\rho_n g} = 1,655m$$

$$h_s = (1,655 + 0,45 + 0,75/2)$$

$$\rightarrow h_s = 2,48m$$

$$p_s = \rho_n g\, h_s = 850 \cdot 9,81 \cdot 2,48 = 20679,48 Pa$$

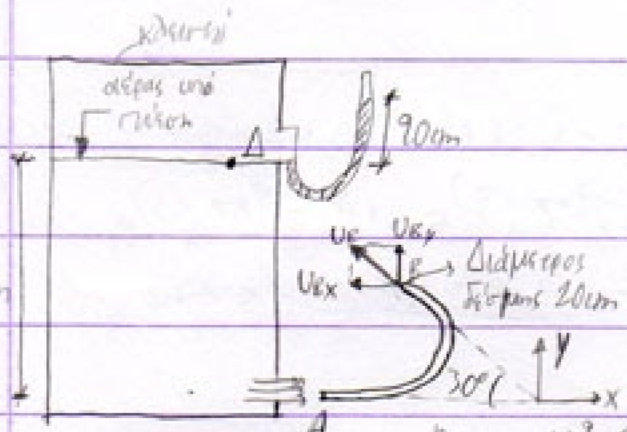
$$\left.\begin{array}{l} F_s = p_s E \\ E = \pi r^2, \text{ όπου } r = 0,225 \end{array}\right\} F_s = \ldots$$

$$y_s = (BS) = \frac{h_s}{\sin 60^\circ} \rightarrow (BS) = 2,86m = y_s$$

$$y_P = \frac{I_{xs}}{y_s \cdot E} + y_s = 2,8644m$$

ΕΜΜΟΡΦΗ!

Νερό εκρρέει από τη δεξαμενή του σχήματος μέσω της οπής διαμέτρου 10cm στην ατμόσφαιρα και κατόπιν προσκρούει στην AB, της οποίας τα σημεία A και B βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο. Η κατανομή της ταχύτητας στα σημεία αυτά είναι ομοιόμορφη. Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια AB. $\rho_{Hg} = 13\rho_{νερ}$.



$p_{αέρα} = \gamma_{Hg} \cdot 0{,}9 = 13 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9 = 95.506 Pa$

$p_2 = 0$

Bernoulli: $(\Delta) \rightarrow (2)$: $\frac{p_\Delta}{\gamma} + \cancel{\frac{U_\Delta^2}{2 \cdot g}}^{\approx 0} + z_\Delta = \cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{0} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + z_2$

$\Rightarrow V_2 = 29{,}922 \ m/sec$

Δέσμη νερού! $p_A = p_B = 0$

Bernoulli $(2) \rightarrow (A)$: $\cancel{\frac{p_2}{\gamma}}^{0} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \cancel{z_2} = \cancel{\frac{p_A}{\gamma}}^{0} + \frac{V_A^2}{2 \cdot g} + \cancel{z_A}$

$\Rightarrow V_2 = V_A$

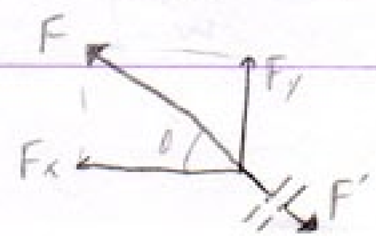
Bernoulli$(A) \rightarrow (B)$: $\cancel{\frac{p_A}{\gamma}}^{0} + \frac{V_A^2}{2 \cdot g} + \cancel{z_A} = \cancel{\frac{p_B}{\gamma}}^{0} + \frac{V_B^2}{2 \cdot g} + \cancel{z_B} \Rightarrow V_A = V_B = V_2 = 29{,}922 \ m/sec.$

$Q_{εισ.} = V_A \cdot \pi \cdot \frac{0{,}2^2}{4} = 0{,}0939 \ m^3/sec. = Q_{εξ.}$

- Θ.Π.Κ. κατά **x**: $-\rho \cdot \left(V_A \cdot \pi \frac{0{,}2^2}{4}\right) V_A + \rho \cdot \left(V_B \cdot \pi \cdot \frac{0{,}2^2}{4}\right) \cdot (-V_B \cdot \cos 30°) = F_x$

$\Rightarrow F_x = - \ldots$

- Θ.Π.Κ. κατά y - $\rho \cdot \left(V_B \cdot \pi \cdot \frac{0{,}2^2}{4}\right) \cdot (V_B \cdot \sin 30°) = F_y \Rightarrow F_y = + \ldots$



$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

Το δυναμικό της ταχύτητας είναι $\phi = -k(x^2-y^2)$ i) Ποιές οι γραμμές ροής και ποιό το σημείο ανακοπής της ροής; ii) Κατά μήκος της επίπεδης πλάκας να βρείτε τη μεταβολή της πίεσης. Αν η πίεση στο O είναι μηδέν, ποια η πίεση για $x=1$, iii) Ποια η συνάρτηση ροής; iv) Βρείτε τη στροβιλότητα του πεδίου.

i) Α' ΤΡΟΠΟΣ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (1)$$

$$\phi = -k(x^2-y^2) \rightarrow u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow u = -2kx \ (2) \quad , v = 2ky \ (3)$$

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow x \cdot y = c$$ (υπερβολές)

$$|\bar{v}| = \sqrt{u^2+v^2} \Rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{(-2kx)^2+(2ky)^2} \Rightarrow |\bar{v}| = \sqrt{4k^2(x^2+y^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \rightarrow O(0,0)$$

ii) Navier-Stokes κατά x

$$\frac{du}{dt} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} = \cancel{B_{mx}}^{0} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}\right)$$

$$\Rightarrow u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow -2k\cdot x\cdot(-2k) = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = -4k^2\rho x}$$

$$p = \int_0^1 (-4k^2\rho x)\,dx = c + \left[\frac{4k^2\rho x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow p = c - 2k^2\rho \xrightarrow[c=0]{p(0)=0} p = -2k^2\rho \quad (\Sigma\Sigma!)$$

(η' αόριστο και $c=0$) ✓

iii) $\psi = -2kxy$

iv) $$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w=0 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$ → αστρόβιλη ροή

$D=350mm$, $\varepsilon=0{,}295mm$, $Q=500\ l/s$, πετρέλαιο $\rho=895\ kg/m^3$, $\nu=4{,}4\cdot10^{-6}\ m^2/s$

α) Ποιά η μοναδιαία πτώση πίεσης κατά μήκος;

β) Πόση ισχύς χάνεται στο παραπάνω μήκος (2m);

γ) Ποιά η απώλεια ισχύος αν ήταν λείος και ποιά αν είχε τραχύτητα 25 φορές μεγαλύτερη από την αρχική;

δ) Δώστε εκτίμηση για την απώλεια ισχύος όταν $\varepsilon=2mm$.

α) $Q=\bar{U}A \Rightarrow \bar{U}=Q/A=5{,}197\ m/sec.$

Έστω τραχεία τυρβώδης ροή ($Re_* > 70$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log\frac{D}{\varepsilon}+1{,}14 \Rightarrow \lambda=0{,}0255$$

$$U_*=\bar{U}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}}=0{,}299\ m/sec.$$

$$Re_*=\frac{U_*\cdot\varepsilon}{\nu}=\frac{0{,}299\cdot0{,}295\cdot10^{-3}}{4{,}4\cdot10^{-6}}=0{,}506<70$$

Έστω ότι έχουμε λεία ροή, δηλαδή $Re_*<5$

$$Re=\frac{\bar{U}\cdot D}{\nu}=413.398>10^5 \rightarrow \text{τυρβώδης}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log(Re\sqrt{\lambda})-0{,}8 \xrightarrow{\text{με δοκιμές}} \underline{\lambda=0{,}014}$$

$$\frac{\bar{U}}{U_*}=\sqrt{\frac{8}{0{,}014}} \Rightarrow U_*=0{,}217\ m/sec.$$

$$Re_*=\frac{U_*\cdot\varepsilon}{\nu}=6{,}765>5$$

άρα παίρνω Colebrook: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3{,}7}+\frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \xrightarrow{\text{δοκιμές}} \underline{\lambda=0{,}017}$

$$\frac{\Delta P}{\Delta x}=\frac{\lambda}{2D}\cdot\rho\cdot\bar{U}^2=541{,}24\ Pa/m \Rightarrow \Delta P=541{,}24\ Pa$$

β) $P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_f$

$$H_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{u}^2}{2g} \Rightarrow H_f = 0,0669 m$$

άρα, $P = 895 \cdot 9,81 \cdot 500 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0669 \Rightarrow P = 970,57$ Joule/sec. (Watt)

γ) Αν ήταν λείος ο αγωγός τότε $\lambda = 0,024$, οπότε $H_f = 0,055 m$.

οπότε: $P = 895 \cdot 9,81 \cdot 500 \cdot 10^{-3} \cdot 0,055 \rightarrow P = 229.564$ Watt

Αν είχε τραχύτητα 15 φορές μεγαλύτερη από την αρχική → νέο πρόβλημα

έστω τραχεία τυρβώδης ροή ($Re_* > 70$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\frac{D}{\varepsilon'} + 1,14 \xrightarrow{\varepsilon' = 15\varepsilon} \lambda = 0,0309$$

$$u_* = \bar{u}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \rightarrow u_* = 0,393 \, m/sec. \qquad Re_* = \frac{u_* \cdot \varepsilon}{\nu} = 237,649 > 70$$

Οπότε: $P = 895 \cdot 9,81 \cdot 500 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,0309 \cdot 1 \cdot 5,297^2}{350 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 9,81} = 492,802$ Watt

δ) Για $\varepsilon = 0,295 mm \rightarrow P = 970,57$ Watt

Για $\varepsilon = 15 \cdot 0,295 mm \rightarrow P = 492,802$ Watt

Για $\varepsilon = 2mm$ μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η απώλεια ισχύος θα είναι μεταξύ των δύο παραπάνω τιμών και μάλιστα θα μπορεί να ισούται και με το μέσο όρο αυτών των δύο. Δηλαδή

$P = 381,2855$ Watt.

ΠΟΛΥ ΚΑΛΗ!

Για ένα μήκος 25m σε έναν τραχύ κυλινδρικό αγωγό ακτίνας $R=12,5cm$ και $\varepsilon=0,5mm$, που διαρρέεται από νερό, βρέθηκε μια πτώση του πιεζομετρικού ύψους κατά 1,5m. Στο όριο μεταξύ γραμμικής και λογαριθμικής κατανομής η ταχύτητα είναι ίση με 0,3 m/sec.

α) Χωρίς να εκτιμήσετε την τιμή του δ, που η ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά, αλλά βασιζόμενοι στη λογαριθμική κατανομή, βρείτε τον αριθμητικό συντελεστή α, ώστε $\delta=\alpha\varepsilon$.

β) Αν εκτιμήσετε την τιμή του δ, επαληθεύεται η παραπάνω σχέση; Αν όχι, που οφείλεται κατά τη γνώμη σας η διαφορά που υπάρχει;

α) Οι λογαριθμικές κατανομές που μπορώ να χρησιμοποιήσω είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{\bar{U}_x}{U_*}=2,5\cdot\ln\frac{y\cdot U_*}{\nu}+5,5 \text{ (λείοι αγωγοί)}$$

$$\frac{\bar{U}}{U_*}=2,5\ln\frac{y}{\varepsilon}+8,5 \text{ (τραχεία τυρβώδης ροή)}$$

Υποθέτουμε κατανομή: έστω τραχεία τυρβώδης ροή: $Re_*>70$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log\frac{D}{\varepsilon}+1,14 \Rightarrow \lambda=0,023$$

$$\frac{H_f}{l}=\frac{\lambda}{D}\cdot\frac{\bar{U}^2}{2g} \Rightarrow \bar{U}=3,577\ m/sec.$$

$$U_*=\bar{U}\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \Rightarrow U_*=0,192\ m/sec.$$

Επαλήθευση: $Re_*=\frac{U_*\cdot\varepsilon}{\nu}=\frac{0,192\cdot0,5\cdot10^{-3}}{10^{-6}}=96>70!$

$$\frac{U}{U_*}=2,5\cdot\ln\frac{y}{\varepsilon}+8,5 \rightarrow \frac{0,3}{0,192}=2,5\cdot\ln\frac{\delta}{\delta/d}+8,5 \rightarrow$$

$$\ldots\quad d=0,00268$$

$$\delta=d\cdot\varepsilon=0,00084\cdot10^{-3}m$$

β) $\delta=\frac{6\cdot\nu}{U_*}=\frac{6\cdot10^{-6}}{0,192}=31,25\cdot10^{-6}m$

Η διαφορά οφείλεται στο ότι αντικαταστήσαμε το $y=\delta$ σε λογαριθμική κατανομή (ενώ ως το δ έχουμε γραμμική κατανομή).

(SOS ΑΕΑ)!

Είναι γνωστό ότι μια γενική έκφραση της κατανομής της ταχύτητας σε κυλινδρικό αγωγό είναι η εξής: $\frac{U_{max} - \bar{U}_x}{U_*} = 5{,}75 \cdot \log\frac{R}{y}$ (1).

Ένας αγωγός $D=10cm$ και μέσης τραχύτητας $\varepsilon = 0{,}9mm$, διαρρέεται από αέρα, ο οποίος έχει $\nu = 25\cdot10^{-6} m^2/s$ και $Q = 40 l/s$. Για $y=\delta$ βρέθηκε ότι $\bar{U}_x = 3{,}5 m/s$. Επίσης βρέθηκε πειραματικά η σχέση: $\frac{U_{max}}{u_*} = \frac{\bar{U}}{u_*} + 4{,}07$ (2).

α) Υποθέτοντας ότι το δ μπορεί να γραφεί ως $\delta = \alpha\cdot\varepsilon$, βρείτε πόσο είναι το α με τη χρήση των παραπάνω σχέσεων.

β) Μπορείτε με τα αποτελέσματα να έχετε στη διάθεσή σας να πείτε αν ο αγωγός είναι λείος ή τραχύς; Εξηγείστε την απάντησή σας.

γ) Από μια άλλη έκφραση του δ, να ξαναυπολογίσετε το συντελεστή α. Αν υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο τιμών που βρήκατε, πού οφείλεται;

α) $Q = \bar{U} A \Rightarrow \bar{U} = \frac{40\cdot10^{-3}}{\pi\cdot\frac{0{,}1^2}{4}} \Rightarrow \bar{U} = 5{,}093\ m/sec.$

Έστω ότι έχω τραχεία τυρβώδη ροή ($Re_* > 70$)

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\frac{D}{\varepsilon} + 1{,}14 \Rightarrow \lambda = 0{,}0934$

$U_* = \bar{U}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0{,}975\ m/sec.$

$Re_* = \frac{U_*\cdot\varepsilon}{\nu} = 3{,}667 < 70$!

!! έστω ότι έχω λεία ροή, δηλαδή $Re_* < 5$

$Re = \frac{\bar{U}\cdot D}{\nu} = 33953 < 10^5 \longrightarrow \lambda = \frac{0{,}316}{Re^{0{,}25}} = 0{,}0933$

$u_* = \bar{U}\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0,975\ m/sec.$

$Re_* = \frac{u_*\cdot\varepsilon}{\nu} = 3,667 < 5$ o.k. λεία ροή.

$\frac{U_{max} - \bar{U}_x}{u_*} = 5,75\cdot\log\frac{R}{y} \Rightarrow \frac{U_{max} - 3,5}{0,975} = 5,75\cdot\log\frac{0,05}{y}$

$\frac{U_{max}}{u_*} = \frac{\bar{U}}{u_*} + 4,07 \Rightarrow U_{max} = 6,979\ m/sec.$

$(1) \rightarrow \frac{6,979 - 3,5}{0,975} = 5,75\cdot\log\frac{0,05}{d\cdot 0,9\cdot 10^{-3}} \Rightarrow d = 4,829$

β) Ο αγωγός συμπεριφέρεται σαν λείος, αφού $Re_* < 5$.

γ) $\delta = \frac{6\nu}{u_*} = 397,973\cdot 10^{-6}\ m$

$\delta = d\cdot\varepsilon \Rightarrow d = 2,03$

Η διαφορά οφείλεται στο δεν αντικαθιστάμε το δ σε λογαριθμική κατανομή.

Αγωγός με τραχύτητα $\varepsilon = 1mm$, $D = 22cm$ διαρρέεται από νερό. Η ένδειξη του μανομέτρου είναι $h = 0,06m$, $\rho_{Hg} = 13.600\ kgr/m^3$.

α) Ο αγωγός συμπεριφέρεται σαν λείος ή όχι;

β) Χωρίς να υπολογίσετε το λ, βρείτε το $\bar{U}$.

γ) Αφού υπολογίσετε το λ, βρείτε το $\bar{U}$.

δ) Σε ποια απόσταση από το τοίχωμα y η $\bar{U}_x = \bar{U}$ και σε ποια απόσταση είναι η $\bar{U}_x = 2,5\bar{U}$.

γιατί; ok!

α) $\frac{\Delta p}{\gamma_\mu - \gamma_\rho} = h \Rightarrow \Delta p = 0,06 \cdot 9,81 \cdot (13.600 - 1.000) \Rightarrow \Delta p = 7.416,36\,Pa$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta x} &= \frac{\lambda}{2D} \cdot \rho \cdot \bar{U}^2 \\ \frac{\bar{U}^2}{U_*^2} &= \frac{8}{\lambda} \Rightarrow \bar{U}^2 \lambda = 8 \cdot U_*^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 7.416,36 = \frac{8 \cdot U_*^2 \cdot 1.000}{2 \cdot 0,22} \Rightarrow U_* = 0,479$$

$Re_* = \frac{U_* \cdot \varepsilon}{\nu} = \frac{0,479 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} \Rightarrow Re_* = 479 > 70 \rightarrow$ τραχεία τυρβώδης ροή

β) $\frac{\bar{U}}{U_*} = 2,5 \cdot \ln\frac{D}{2 \cdot \varepsilon} + 4,73 \Rightarrow \bar{U} = 7,064\ m/sec.$

γ) $\bar{U} = U_* \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \Rightarrow \bar{U} = 0,479 \cdot \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ (1)

Επειδή $Re_* > 70 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\frac{D}{\varepsilon} + 1,14 \Rightarrow \lambda = 0,0356$ (2)

$(1) \xrightarrow{(2)} \bar{U} = 0,479 \cdot \sqrt{\frac{8}{0,0356}} \Rightarrow \bar{U} = 7,064\ m/sec.$

δ) Η $\bar{U}$ εμφανίζεται $\simeq \frac{1}{3} R >> \delta \rightarrow$ άρα λογαριθμική κατανομή

$\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 2,5 \cdot \ln\frac{y}{\varepsilon} + 8,5 \xrightarrow{\bar{U}_x = \bar{U}} y = 0,0233m \rightarrow 0 < y < 0,06$

και $\bar{U}_x = 2,5\bar{U} \rightarrow y = 0,905m > R$ άτοπο!

Λείος αγωγός ακτίνας r διαρρέεται από ρευστό πυκνότητας ρ και ιξώδους ν. Για ένα μήκος l του αγωγού βρέθηκε απώλεια ΔΗ. Η κατανομή των ταχυτήτων για y<δ είναι γραμμική, ενώ για y>δ λογαριθμική. Βασιζόμενοι στα για y=δ η χρονική μέση τοπική ταχύτητα πρέπει να έχει κοινή τιμή ίση με το U_δ, βρείτε το δ.

ΛΥΣΗ

Για y<δ είναι: $\dfrac{\bar{U}_x}{u_*} = \dfrac{y \cdot u_*}{\nu}$

Για y>δ είναι: $\dfrac{\bar{U}_x}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln \dfrac{y u_*}{\nu} + 5{,}5$

Για y=δ και για $\bar{U}_x = U_\delta$ οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_\delta}{u_*} &= \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} \\ &\text{και} \\ \frac{U_\delta}{u_*} &= 2{,}5 \cdot \ln \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} + 5{,}5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} &= 2{,}5 \cdot \ln \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} + 5{,}5 \\ x &= \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$F(x) = x - 2{,}5 \ln x - 5{,}5$$

αρχική τιμή x=6 !

x	F(x)
6	-3,979
29	0,968
22,6	-0,097
22,64	0,004

άρα $\left.\begin{aligned} x &= 22{,}64 \\ x &= \frac{\delta \cdot u_*}{\nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta = \dfrac{22{,}64 \cdot \nu}{u_*}$

$$u_* = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{gDJ} = \frac{2}{9} \sqrt{gD \frac{\Delta H}{l}}$$

άρα, $\delta = \dfrac{22{,}64 \cdot \nu \cdot 2}{\sqrt{gD \Delta H / l}} = \dfrac{93{,}98 \nu}{\sqrt{gD \Delta H / l}}$

Λείος αγωγός ακτίνας R, ν δίνει την κατανομή $\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 8,74\left(\frac{U_* \cdot y}{\nu}\right)^{1/7}$ (1)

Με τη βοήθεια των πειραματικών δεδομένων να δείξετε ότι:

α) $\frac{\bar{U}}{U_*} = 7\left(\frac{U_* \cdot R}{\nu}\right)^{1/7}$ (2) και β) $\lambda = \lambda(Re)$

α) Στο κέντρο του αγωγού, δηλαδή για $y = R \rightarrow \bar{U}_x = U_{max}$

οπότε η (1) γίνεται $\frac{U_{max}}{U_*} = 8,74 \cdot \left(\frac{U_* \cdot R}{\nu}\right)^{1/7}$.

Με τη βοήθεια πειραματικών δεδομένων $\frac{\bar{U}}{U_{max}} = 0,8 \Rightarrow U_{max} = \frac{\bar{U}}{0,8}$

οπότε $\frac{\bar{U}/0,8}{U_*} = 8,74\left(\frac{U_* \cdot R}{\nu}\right)^{1/7} \Rightarrow \frac{\bar{U}}{U_*} \simeq 7\left(\frac{U_* \cdot R}{\nu}\right)^{1/7}$

β) $\frac{\bar{U}}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \Rightarrow U_* = \bar{U} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{U}\sqrt{\lambda/8}} = 7\left(\frac{\bar{U}\sqrt{\lambda} \cdot D/2}{\sqrt{8} \cdot \nu}\right)^{1/7} \Rightarrow \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = 7 \cdot \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{Re}{2}\right)^{1/7}$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 0,316/Re^{0,25} = \lambda(Re)$$

Λείος κυλινδρικός αγωγός διαμέτρου D=50cm διαρρέεται από νερό. Βρέθηκε πειραματικά ότι η μέση ταχύτητα είναι 0,35 m/sec. Ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 2{,}5 \cdot \ln \frac{y \cdot U_*}{\nu} + 5{,}5$, $\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 8{,}74 \cdot \left(\frac{U_* \cdot y}{\nu}\right)^{1/7}$

α) Να βρεθεί την ταχύτητα τριβής στο τοίχωμα χωρίς πράξεις με δύο τρόπους και με έναν τρόπο να την υπολογίσετε.

β) Να υπολογιστεί το πάχος του στρωτού υποστρώματος.

γ) Ποιά η μέγιστη ταχύτητα; Βρείτε την χρησιμοποιώντας και τις δύο σχέσεις χωριστά.

α) 1ος τρόπος: $\frac{\bar{U}}{U_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$

$Re = \frac{\bar{U} \cdot D}{\nu} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}5}{10^{-6}} = 175.000 > 10^5$

Άρα, ο προσδιορισμός του λ γίνεται με βάση το νόμο του Prandtl, δηλαδή: $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2\log(Re\sqrt{\lambda}) + 0{,}8$ και με δοκιμές ξεκινώντας από την τιμή 0,02 βρίσκουμε την κατάλληλη τιμή του λ, έτσι ώστε να έχουμε απόκλιση ±0,01 για την τιμή της F(λ), που θα πρέπει να είναι μηδέν.

2ος τρόπος: $\frac{\bar{U}}{U_*} = 2{,}5 \cdot \ln \frac{U_* \cdot D}{2 \cdot \nu} + 1{,}75$

$\frac{0{,}35}{U_*} = 2{,}5 \cdot \ln \frac{U_* \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{-6}} + 1{,}75$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(U_*) = \frac{0{,}35}{U_*} - 2{,}5 \cdot \ln \frac{U_* \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{-6}} - 1{,}75$ και με δοκιμές ξεκινώντας από την τιμή 0,02 βρίσκουμε την κατάλληλη τιμή του U_* έτσι ώστε να έχουμε απόκλιση ±0,01 για την τιμή της $F(U_*)$, που θα πρέπει να είναι μηδέν.

U_*	$F(U_*)$
0,09	-5,54
0,08	-99,234
0,02	23,69
0,026	-0,62
⋮	
0,0256	0,024
0,02562	0,009

0,009 → μου κάνει, άρα την επιλέγω!

Δηλαδή, $U_* = 0,02562 \ m/sec$

β) Όταν μας ζητάει το πάχος του οριακού υποστρώματος ή να εκτιμήσετε το δ, τότε και μόνο τότε $\delta = \frac{6 \cdot v}{U_*} = 0,384 mm$

γ) 1η σχέση: $\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 2,5 \cdot \ln \frac{y U_*}{v} + 5,5$

Βάζουμε στη σχέση όπου $\bar{U}_x = U_{max}$ και όπου $y = D/2 = 0,25m$

$\frac{U_{max}}{0,02562} = 2,5 \ln \frac{0,25 \cdot 0,02562}{10^{-6}} + 5,5 \rightarrow \boxed{U_{max} = 0,409 \ m/sec.}$

2η σχέση: $\frac{\bar{U}_x}{U_*} = 8,74 \cdot \left(\frac{U_* \cdot y}{v} \right)^{1/7}$ Βάζουμε στη σχέση όπου

$\bar{U}_x = U_{max}$ και όπου $y = D/2 = 0,25m$

$\frac{U_{max}}{0,02562} = 8,74 \cdot (0,02562 \cdot 0,25)^{1/7} \rightarrow U_{max} = 0,445 \ m/sec.$

Δεν είναι ίδια, γιατί η εκθετική δεν είναι τόσο ακριβής στην περιοχή μας, διότι $Re > 10^5$.