ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά ΙΙ, Εξέταση Περιόδου Ιουνίου 24/6/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση (15 μον.)

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

2. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (15 μον.)

$$y'' - y' - 2y = 4x - 4.$$

3. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στη σφαίρα (10 μον.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

στο σημείο $P(1, 1, 1)$.

4. Να υπολογισθεί η παράγωγος της $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ στο σημείο (-1,1) στην κατεύθυνση του $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. (10 μον.)

5. Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα (10 μον.)

$$\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2)\, dy\, dx$$

.

6. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και πάνω από τον κυκλικό δίσκο $x^2 + y^2 \leq 4$. (10 μον.)

7. Σχεδιάστε το πεδίο ολοκλήρωσης, αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα (15 μον.)

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\, dy\, dx$$

8. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $f(x, y) = x^2 + y^2$ επί της ευθείας $2x + y = 4$. Γιατί είναι η ελάχιστη κι όχι η μέγιστη; (15 μον.)

Καλή επιτυχία

ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά ΙΙ, Εξέταση Περιόδου Ιανουαρίου, 28/1/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. [1.6] Να λύθεί η διαφορική εξίσωση $(3x^2 + 4xy) + (2x^2 + 3y^2)y' = 0$.

Λύση. Με $M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ και $N(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ έχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x \quad \text{και} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x,$$

άρα η δοθείσα διαφορική εξίσωση (δ.ε.) είναι ακριβής. Λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial g}{\partial x} = M(x, y) = 3x^2 + 4xy \tag{1}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = N(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας τη (2) ως προς y παίρνουμε

$$g(x, y) = \int (2x^2 + 3y^2)\, dy = 2x^2y + y^3 + c(x).$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x παίρνουνε

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4xy + c'(x),$$

η οποία σε συνδυασμό με την (1) μας δίνει $c'(x) = 3x^2$, κι άρα

$$c(x) = x^3 + C \quad (C : \text{σταθερά})$$

Έτσι

$$g(x, y) = 2x^2y + y^3 + x^3 + C \quad (C : \text{σταθερά}),$$

κι επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή

$$2x^2y + y^3 + x^3 = \lambda \quad (\lambda : \text{σταθερά})$$

2. [1.6] Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$.

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δ.ε.)

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

είναι η

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0.$$

Οι ρίζες της παραπάνω είναι οι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = 4$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

(c_1, c_2 :σταθερές). Έπειτα ψάχνουμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε. της μορφής $y = Ae^{2x}$. Έχουμε

$$y'(x) = 2Ae^{2x} \quad \text{και} \quad y''(x) = 4Ae^{2x}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} y'' - 7y' + 12y &= 4Ae^{2x} - 7 \cdot 2Ae^{2x} + 12 \cdot Ae^{2x} \\ &= 2Ae^{2x}, \end{aligned}$$

οπότε πρέπει $2A = 1$, δηλ. $A = \frac{1}{2}$. Επομένως η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε. είναι η

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{1}{2} e^{2x}},$$

με c_1, c_2 :σταθερές.

3. [1.5] Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 3$$

στο σημείο $P(3, 4, 5)$.

Λύση. Με $f(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} =$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(3,4,5) &= \frac{2x}{9}\Big|_{(x,y,z)=(3,4,5)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(3,4,5) &= \frac{2y}{16}\Big|_{(x,y,z)=(3,4,5)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(3,4,5) &= \frac{2z}{25}\Big|_{(x,y,z)=(3,4,5)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{2z}{5} = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{2}{5} \cdot 5$$

δηλ.

$$\boxed{\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{2z}{5} = 6},$$

ή ισοδύναμα, πολλαπλασιάζοντας με το 30, δηλ. το ελαχ. κοινό πολ/σιο των 3, 2, και 5, η

$$\boxed{20x + 15y + 12z = 180}.$$

4. [1.5] Έστω $z = x^2y^3$, όπου $x = u^2v$ και $y = u^2 + v^2$. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= (2xy^3) \cdot (2uv) + (3x^2y^2) \cdot (2u) \\
&= 2(u^2v)(u^2+v^2)^3 \cdot (2uv) + 3(u^2v)^2(u^2+v^2)^2 \cdot (2u)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= (2xy^3) \cdot u^2 + (3x^2y^2) \cdot (2v) \\
&= 2(u^2v)(u^2+v^2)^3 \cdot u^2 + 3(u^2v)^2(u^2+v^2)^2 \cdot (2v)
\end{aligned}$$

5. [1.6] Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R x^2 e^{xy}\, dA,$$

όπου R είναι η τριγωνική περιοχή στο xy-επίπεδο που περικλείεται από τις ευθείες $y = x$, $y = 0$, και $x = 1$.

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης R είναι

$$R = \{(x, y) |\, 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\}.$$

Επομένως ο ζητούμενος όγκος ισούται με

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy}\, dy\, dx &= \int_0^1 \Big[x e^{xy} \Big]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 (x e^{x^2} - x)\, dx \\
&= \Big[\frac{e^{x^2} - x^2}{2} \Big]_{x=0}^{x=1} \\
&= \boxed{\frac{e}{2} - 1} \quad \text{κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}$$

6. [1.6] Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

και υπεράνω του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Λύση. Ο ζητούμενος όγκος ισούται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dA,$$

Η πολική μορφή του D είναι

$$D = \{(r, \theta) |\, 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Σε πολικές συντεταγμένες το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\, r dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, d\theta \\
&= \boxed{\frac{\pi}{2}} \quad \text{κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}$$

7. [1.6] Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.

Λύση. Πρέπει να βρούμε τις τιμές των x, y και λ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y), \\ g(x,y) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Αφού

$$\nabla f(x,y) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

και

$$\nabla g(x,y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda x, \\ 2y &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμο με το

$$x(2-\lambda) = 0, \tag{3}$$

$$y(1-\lambda) = 0, \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 = 4. \tag{5}$$

Αν $x = 0$, τότε η (3) μας δίνει $y = \pm 2$ και η (2) $\lambda = 1$. Αν $x \neq 0$, τότε η (1) μας δίνει $\lambda = 2$ και η (2) $y = 0$, οπότε από την (3) παίρνουμε $x = \pm 2$. Συνεπώς, οι λύσεις (x,y) που παίρνουμε είναι οι $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$, $(-2,0)$

Υπολογίζοντας τις τιμές της f στα παραπάνω σημεία βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο δοθέντα κύκλο είναι η

$$f(2,0) = f(-2,0) = 8$$

και η ελάχιστη η

$$f(0,2) = f(0,-2) = 4.$$

ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά ΙΙ, Εξέταση Περιόδου Φεβρουαρίου, 11/2/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. [1.5 μον.] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $x(1+y^2)+y(1+x^2)y'=0$.

   Λύση. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών. Γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0 &\iff y(1+x^2)dy=-x(1+y^2)dx \\ &\iff \frac{y}{1+y^2}dy=-\frac{x}{1+x^2}dx \end{aligned}$$

   Ολοκληρώνοντας τα δυο μέρη της παραπάνω παίρνουμε

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy=-\int \frac{x}{1+x^2}dx+C,$$

   δηλ.

$$\frac{\ln(1+y^2)}{2}=-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C,$$

   που ισοδύναμα γράφεται

$$\ln(1+y^2)+\ln(1+x^2)=2C,$$

   ή

$$\ln(1+y^2)(1+x^2)=2C=\ln(e^{2C})=\ln(A), \quad (A=e^{2C}),$$

   κι άρα

$$(1+y^2)(1+x^2)=A.$$

2. [1.5 μον.] Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''-3y'-10y=6e^{4x}.$$

   Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (δ.ε.)

$$y''-3y'-10y=0$$

   είναι η

$$\lambda^2-3\lambda-10=0.$$

Οι ρίζες της παραπάνω είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 5$, οπότε η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}$$

(c_1, c_2 :σταθερές). Έπειτα ψάχνουμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς δ.ε. της μορφής $y = Ae^{4x}$. Έχουμε

$$y'(x) = 4Ae^{4x} \quad \text{και} \quad y''(x) = 16Ae^{4x}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} y'' - 3y' - 10y &= 16Ae^{4x} - 3 \cdot 4Ae^{4x} - 10 \cdot Ae^{4x} \\ &= -6Ae^{4x}, \end{aligned}$$

οπότε πρέπει $-6A = 6$, δηλ. $A = -1$. Επομένως η γενική λύση της μη ομογενούς δ.ε. είναι η

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x} - e^{4x}},$$

με c_1, c_2 :σταθερές.

3. [1.2 μον.] Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στην επιφάνεια

$$x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$$

στο σημείο $P(1, -1, 3)$.

Λύση. Με $f(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 + z^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 3) &= 2x + 2y\Big|_{(x,y,z)=(1,-1,3)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 3) &= 2x - 2y\Big|_{(x,y,z)=(1,-1,3)} = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 3) &= 2z\Big|_{(x,y,z)=(1,-1,3)} = 6 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$0 \cdot x + 4 \cdot y + 6 \cdot z = 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 6 \cdot 3$$

δηλ.

$$\boxed{4y + 6z = 14},$$

ή ισοδύναμα, διαιρώντας με το 2, δηλ. το μέγιστο κοινό διαιρέτη των 4, 6, και 14, η

$$\boxed{2y + 3z = 7}.$$

4. [1.2 μον.] Έστω $z = e^x \eta\mu y$, όπου $x = uv^2$ και $y = u^2 v$. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= (e^x \eta\mu y)\cdot(v^2) + (e^x \sigma\upsilon\nu y)\cdot(2uv) \\ &= e^{uv^2}\eta\mu(u^2 v)\cdot v^2 + e^{uv^2}\sigma\upsilon\nu(u^2 v)\cdot(2uv)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (e^x \eta\mu y)\cdot 2uv + (e^x \sigma\upsilon\nu y)\cdot(u^2) \\ &= e^{uv^2}\eta\mu(u^2 v)\cdot 2uv + e^{uv^2}\sigma\upsilon\nu(u^2 v)\cdot(u^2)\end{aligned}$$

5. [1.5 μον.] Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R 15xy^2\,dA,$$

όπου R είναι η τριγωνική περιοχή στο xy-επίπεδο που περικλείεται από τις ευθείες $y = x$, $y = 0$, και $x = 2$.

Λύση. Η περιοχή ολοκλήρωσης R είναι

$$R = \{(x, y) |\, 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x\}.$$

Επομένως ο ζητούμενος όγκος ισούται με

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_0^x 15xy^2\,dy\,dx &= \int_0^2 \Big[5xy^3\Big]_{y=0}^{y=x}\,dx \\ &= \int_0^2 5x^4\,dx \\ &= \Big[x^5\Big]_{x=0}^{x=2} \\ &= \boxed{32} \quad \text{κυβικές μονάδες.}\end{aligned}$$

6. [1.5 μον.] Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

και υπεράνω του κυκλικού δίσκου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 9\}$.

Λύση. Ο ζητούμενος όγκος ισούται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA,$$

Η πολική μορφή του D είναι

$$D = \{(r,\theta) |\, 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Σε πολικές συντεταγμένες το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{r^2}\, r dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=3} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 9\, d\theta \\
&= \boxed{18\pi} \quad \text{κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}$$

7. [1.6 μον.] Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $f(x,y) = x^2+y^2$ επί της ευθείας $x+3y=10$. Γιατί είναι η ελάχιστη κι όχι η μέγιστη;

Λύση. Πρέπει να βρούμε τις τιμές των x, y και λ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y), \\
g(x,y) &= 0,
\end{aligned}$$

όπου $g(x,y) = x+3y-10$. Αφού

$$\nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

και

$$\nabla g(x,y) = 1\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda, \\ 2y &= 3\lambda, \\ x + 3y &= 10. \end{aligned}$$

που είναι ισοδύναμο με το

$$x = \frac{\lambda}{2}, \tag{1}$$

$$y = \frac{3\lambda}{2}, \tag{2}$$

$$x + 3y = 10. \tag{3}$$

Από τις παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{2} + 3\frac{3\lambda}{2} = 10,$$

δηλ.

$$\frac{10\lambda}{2} = 10,$$

οπότε $\lambda = 2$, κι από τις (1), (2) παίρνουμε $x = 1$ και $y = 3$. Συνεπώς, η μοναδική λύση (x, y) που παίρνουμε είναι η $(1, 3)$ με $f(1, 3) = 1^2 + 3^2 = 10$.

Η τιμή αυτή είναι η ελάχιστη διότι ισούται με το τετράγωνο της απόστασης της δοθείσας ευθείας $x + 3y = 10$ από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2.$$

Η f δεν έχει μέγιστη τιμή επί της ευθείας, διότι μπορούμε να βρούμε σημεία στην ευθεία που να απέχουν οσοδήποτε μακριά από το $(0, 0)$ θέλουμε.