ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά Ι, Εξέταση Περιόδου Ιουνίου 21/6/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. (i) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ τη συνάρτηση $f(x)$ με τύπο (10 μον.)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}, & \alpha\nu \quad x \neq 1 \\ \dfrac{3}{2}, & \alpha\nu \quad x = 1 \end{cases}$$

(ii) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ (10 μον.)

2. (i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (10 μον.)

$$x^2 + 3xy + y^2 = 5$$

στο σημείο $(1, 1)$.

(ii) Να υπολογίστε την παράγωγο $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} \, dt$. (8 μον.)

3. Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int 2x(x^2 + 1)e^{x^2+1} \, \mathrm{d}x$ (12 μον.)

(ii) $\displaystyle\int \frac{4e^x}{e^{2x} - 4} \, \mathrm{d}x$ (12 μον.)

4. (i) Έστω $f(x) = \tan x - x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Να δειχθεί ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = \tan^2 x$. (8 μον.)

(ii) Έστω Α η περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από την καμπύλη $y = \tan x$ και τις ευθείες $y = 0$ και $x = \frac{\pi}{4}$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από μια πλήρη περιστροφή της περιοχής Α ως προς τον x-άξονα. (6 μον.)

5. Έστω η καμπύλη $C = \{(x(t), y(t)) : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ όπου $x(t) = 8\cos t + 8t \sin t$ και $y(t) = 8 \sin t - 8t \cos t$.

(i) Βρείτε την $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. (8 μον.)

(ii) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης. (6 μον.)

6. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών (10 μον.)

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

Επαληθεύσατε τη λύση που βρήκατε.

Καλή επιτυχία

ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά Ι, Εξέταση Περιόδου Ιανουαρίου 25/1/2010
Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. (i) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια και παραγωγισιμότητα στο 0 τη συνάρτηση $f(x)$ με τύπο [1.5]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}, & \text{αν} \quad x > -1 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

Λύση. Για να είναι συνεχής στο 0 θα πρέπει να είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hôpital δυο φορές, κι αφού $\lim_{x\to 0}\ln(1+x) = \ln 1 = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2} \\ &= \frac{1}{2} \neq 1 = f(0).\end{aligned}$$

Επομένως η f είναι ασυνεχής στο 0 κι άρα μη παραγωγίσιμη στο 0.

(ii) Να υπολογισθεί το όριο [1.5]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+\text{ημ}(x+1)}{2x^2+2+\text{συν}(2x+2)}$$

Λύση. Αφού $-1 \leq \text{ημ}(x+1) \leq 1$ για κάθε πραγματικό x, διαιρώντας με x^2+1 παίρνουμε

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{\text{ημ}(x+1)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής και την παραπάνω ανισότητα παίρνοντας $x \to +\infty$ έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}(x+1)}{x^2+1} = 0$. Ομοίως δείχνουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}(2x+2)}{x^2+1} = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1+\text{ημ}(x+1)}{2x^2+2+\text{συν}(2x+2)} \overset{:(x^2+1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\text{ημ}(x+1)}{x^2+1}}{2+\frac{\text{συν}(2x+2)}{x^2+1}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

2. (i) Προσδιορίστε τις τιμές των α και β για τις οποίες η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο [1.5]

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x - 1$$

παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -2$. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε, δείξτε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_2 και τοπικό ελάχιστο στο x_1. Είναι κάποιο από αυτά ολικό ακρότατο;

Λύση. Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6$. Πρέπει $f'(1) = f'(-2) = 0$, οπότε παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$3\alpha + 2\beta = 6 \quad \text{και} \quad 12\alpha - 4\beta = 6$$

που έχει λύσεις $\alpha = 1$ και $\beta = \frac{3}{2}$. Έτσι

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 1$$

και

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x-1)(x+2)$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x		-2		1	
Πρόσημο της f'	$+$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$+$
Μονοτονία της f	$\nearrow$	$\vdots$	$\searrow$	$\vdots$	$\nearrow$
		τοπ.μεγ.		τοπ.μιν.	

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = -2$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ κανένα από τα x_1, x_2 δεν είναι ολικό ακρότατο.

(ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ στο σημείο $(1, 3)$. [1]

Λύση. Παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω ως προς x και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{12} = 0 &\iff \frac{x}{2} + \frac{yy'}{6} = 0 \\ &\iff \frac{yy'}{6} = -\frac{x}{2} \\ &\iff y' = -\frac{3x}{y} \end{aligned}$$

Με $x = 1$ και $y = 3$ παίρνουμε

$$y'(1) = -\frac{3 \cdot 1}{3} = -1.$$

η εξίσωση της εφαπτομένης στην δοθείσα έλλειψη στο σημείο $(1, 3)$ είναι

$$y - 3 = (-1) \cdot (x - 1) = -x + 1,$$

ή ισοδύναμα

$$y = -x + 4.$$

3. Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα. [1.5+1.5]

$$\text{(i)} \quad \int x e^{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+10}} \,\mathrm{d}x$$

Λύση. (i) Θέτουμε $u = \sqrt{x^2+1}$, οπότε $u^2 = x^2 + 1$ και $2udu = 2xdx$, δηλ. $udu = xdx$. Άρα

$$\int x e^{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x = \int u e^u \,du$$

που με ολοκλήρωση κατά παράγοντας ισούται με

$$\int u e^u \,du = u e^u - \int e^u \,du = u e^u - e^u + C = e^u (u - 1) + C,$$

οπότε

$$\int x e^{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x = e^u (u - 1) + C = e^{\sqrt{x^2+1}} (\sqrt{x^2+1} - 1) + C.$$

(ii) Θέτουμε $u = \sqrt{x^2+10}$, οπότε $u^2 = x^2 + 10$ και $2udu = 2xdx$, δηλ. $udu = xdx$ και $x^2 + 9 = u^2 - 1$. Άρα

$$\int \frac{x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+10}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{(u^2-1)u} \,du = \int \frac{1}{u^2-1} \,du$$

Αναλύουμε το $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1}{(u-1)(u+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $(u-1)$ και θέτοντας $u=1$ στην προκύπτουσα

$$\frac{1}{u+1} = A + \frac{B}{u+1}(u-1).$$

παίρνουμε $A = \dfrac{1}{2}$, ενώ πολλαπλασιάζοντας την με $(u+1)$ και θέτοντας $u=-1$ στην προκύπτουσα

$$\frac{1}{u-1} = \frac{A}{u-1}(u+1) + B.$$

παίρνουμε $B = -\dfrac{1}{2}$. Άρα

$$\frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1},$$

κι έτσι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2-1}\,du &= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right)du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{x}{(x^2+9)\sqrt{x^2+10}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+10}-1}{\sqrt{x^2+10}+1}\right| + C$$

4. (i) Έστω Α η περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από την καμπύλη $y = e^x$ [1.5] και τις ευθείες $y=0$, $x=0$ και $x=1$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από μια πλήρη περιστροφή της περιοχής Α ως προς τον x-άξονα.
Λύση. Ο όγκος του στερεού ισούται με

$$V = \pi\int_0^1 e^{2x}\,dx = \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(e^2-1)}{2} \quad \text{κυβικές μονάδες.}$$

(ii) Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $C = \{(x(t), y(t)) : 0 \le t \le \pi\}$ [1]

όπου $x(t) = \sigma\upsilon\nu(t) + t\eta\mu(t)$ και $y(t) = \eta\mu(t) - t\sigma\upsilon\nu(t)$.

Λύση. Το μήκος της καμπύλης C ισούται με

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Είναι

$$x'(t) = -\text{ημ}t + \text{ημ}t + t\text{συν}t = t\text{συν}t$$

και

$$y'(t) = \text{συν}t - \text{συν}t + t\text{ημ}t = t\text{ημ}t$$

οπότε

$$\begin{aligned}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} &= \sqrt{(t\text{συν}t)^2 + (t\text{ημ}t)^2} \\ &= \sqrt{t^2(\text{συν}^2 t + \text{ημ}^2 t)} \\ &= \sqrt{t^2} \\ &= |t| \\ &\overset{t\geq 0}{=} t.\end{aligned}$$

οπότε

$$L = \int_0^{\pi} t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}\text{μονάδες μήκους.}$$

ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Μηχανολογίας
Μαθηματικά Ι, Εξέταση Περιόδου Φεβρουαρίου 8/2/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. (i) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ τη συνάρτηση $f(x)$ με τύπο [1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x}{x-1}, & \alpha\nu \quad x \neq 1 \\ x+2, & \alpha\nu \quad x = 1 \end{cases}$$

Λύση. Για να είναι συνεχής στο 1 θα πρέπει να είναι $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1+2 = 3$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hôpital μια φορά παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - x}{x-1} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 1}{1} \\ &= \lim_{x\to 1}(4x^3 - 1) \\ &= 4 \cdot 1^3 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο 1.
Παρατήρηση: Μια άλλη λύση θα μπορούσε να δοθεί χωρίς τον κανόνα l'Hôpital. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι

$$\frac{x^4 - x}{x-1} = \frac{x(x^3-1)}{x-1} = \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x(x^2+x+1) \to 1\cdot(1^2+1+1) = 3,$$

καθώς $x \to 1$.

(ii) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^2}$ [1]

Λύση. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hôpital δυο φορές παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^2} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{2} - \frac{3x^2}{6}}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{2x} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \frac{2x}{2}}{2} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα. [1+1+1]

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (ii) $\displaystyle\int (x+1)e^x \,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x$

Λύση. (i) Θέτοντας $t=\sqrt{x}+1$, κι αφού $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

(**Παρατήρηση**: Λύνεται και με την αντικατάσταση $t=\sqrt{x}$).

(ii) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int (x+1)e^x\,dx = (x+1)e^x - \int e^x\,dx = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C,$$

(**Παρατήρηση**: Δείτε και το πρόβλημα 3(i) της πρώτης εξεταστικής).

(iii) Είναι

$$\frac{x-9}{(x-2)(x+5)} = \frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x-2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-9}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x+5| - \ln|x-2| + C\end{aligned}$$

3. (i) Έστω A η περιοχή του επιπέδου που φράσσεται από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ και τις ευθείες $y=0$ και $x=4$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από μια πλήρη περιστροφή της περιοχής A ως προς τον x-άξονα. [1]

Λύση. Ο όγκος του στερεού ισούται με

$$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left(\frac{16}{2} - \frac{0}{2}\right) = 8\pi \quad \text{κυβικές μονάδες.}$$

(ii) Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $C = \{(x(t),y(t)) : 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\}$ όπου $x(t) = 2\sigma\upsilon\nu(t)$ και $y(t) = 2\eta\mu(t)$. [1]

Λύση. Το μήκος της καμπύλης C ισούται με

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Είναι

$$x'(t) = -2\eta\mu t \quad \text{και} \quad y'(t) = 2\sigma\upsilon\nu t$$

και

$$\begin{aligned}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2} &= \sqrt{(-2\eta\mu t)^2 + (2\sigma\upsilon\nu t)^2} \\ &= \sqrt{4(\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t)} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2.\end{aligned}$$

οπότε

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,dt = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - 0) = \pi \quad \text{μονάδες μήκους.}$$

4. (i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην έλλειψη $3x^2 + y^2 = 12$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (-1, -3)$. [1]

Λύση. Παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω ως προς x και παίρνουμε

$$\begin{aligned} 6x + 2yy' = 0 &\iff 2yy' = -6x \\ &\iff \frac{yy'}{6} = -\frac{x}{2} \\ &\iff y' = -\frac{3x}{y} \end{aligned}$$

Με $x = -1$ και $y = -3$ παίρνουμε

$$y'(-1) = -\frac{3 \cdot (-1)}{-3} = -1.$$

η εξίσωση της εφαπτομένης στην δοθείσα έλλειψη στο σημείο $(-1, -3)$ είναι

$$y - (-3) = (-1) \cdot (x - (-1)) = -x - 1,$$

ή ισοδύναμα

$$y = -x - 4.$$

(ii) Έστω $V(x)$ ο όγκος ενός κουτιού <u>ανοικτού από πάνω</u> που κατασκευάζουμε αφαιρώντας τετράγωνο πλευράς x $(0 < x < 5)$ από κάθε γωνία ενός ορθογώνιου χαρτονιού διαστάσεων 10 επί 16. [2]

(a) Να βρεθεί ο τύπος για τον όγκο $V(x)$ και να δειχθεί ότι,

$$V'(x) = 4(x-2)(3x-20) \quad (0 < x < 5)$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned} V(x) &= \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος} \cdot \text{ύψος} \\ &= (16 - 2x)(10 - 2x)x \\ &= 4x^3 - 52x^2 + 160x \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160 \\ &= 4(3x^2 - 26x + 40) \\ &= 4(x-2)(3x-20). \end{aligned}$$

(b) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του όγκου $V(x)$ $(0 < x < 5)$. Ποιές είναι οι διαστάσεις του κουτιού μεγίστου όγκου που μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Λύση. Είναι $V'(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 2$ ή $x = \frac{20}{3}$. Η μόνη αποδεκτή τιμή όμως είναι η $x = 2$ αφού $\dfrac{20}{3} > 5$.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	0		2		5
Πρόσημο της V'	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$-$	$\vdots$
Μονοτονία της V	$\vdots$	$\nearrow$	$\vdots$	$\searrow$	$\vdots$
			$\mu\epsilon\gamma.$		

Άρα η $V(x)$ έχει μέγιστο στο $x = 2$ με τιμή

$$V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144$$

κυβικές μονάδες. Το κουτί μεγίστου όγκου έχει διαστάσεις $12 \times 6 \times 2$.