

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ-III

0.1 ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Λύση: Το συνολικό εμβαδόν της έλλειψης θα είναι το τετραπλάσιο του εμβαδού που αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτημόριο. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με αρκετούς τρόπους. Τρεις από αυτούς είναι οι παρακάτω:

α' τρόπος: Έων χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες το εμβαδόν E θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} E &= 4 \int_D \int dx dy = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx dy = 4 \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right] dx \\ &= 4b \int_{x=0}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \frac{a\pi}{4} = ab\pi \end{aligned}$$

β' τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες με τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

Τα όρια ολοκλήρωσης θα τα βρούμε από την προφανή συνθήκη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$$

όπου με αντικατάσταση και μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$\rho \leq \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}$$

Το εμβαδόν θα είναι τώρα

$$\begin{aligned} E &= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=\frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}}} \rho d\rho \right] d\theta \\ &= 2a^2 b^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a^2 b^2 \frac{\pi}{2ab} = ab\pi \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι με τους δύο παραπάνω τρόπους η δυσκολία έγγειτε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ως προς x (α' τρόπος) και ως προς θ (β' τρόπος). Εφαρμόζοντας όμως τον παρακάτω μετασχηματισμό ο υπολογισμός του εμβαδού απλουστεύεται σημαντικά

γ' τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι πολικές συντεταγμένες με τον παρακάτω όμως μετασχηματισμό

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta, \quad dx dy = ab\rho d\rho d\theta$$

Τα όρια ολοκλήρωσης θα τα βρούμε από την προφανή συνθήκη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$$

όπου με αντικατάσταση και μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$\rho \leq 1$$

Το εμβαδόν θα είναι τώρα

$$E = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=1} ab\rho d\rho \right] d\theta = 4ab \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = 2ab \frac{\pi}{2} = ab\pi$$

Τυπόδειξη : Όπως θα δείξουμε στο 5ο Κεφάλαιο, το παραπάνω εμβαδόν μπορούμε εύκολα να το υπολογίσουμε εφαρμόζοντας τον τύπο του Green, ανάγωντας έτσι το διπλό ολοκλήρωμα σε ένα κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Άσκηση 2. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \int (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy$$

όταν ο τόπος D περικλείεται από την καμπύλη $x^2 + y^2 = x$

Λύση: Η καμπύλη που περιβάλλει τον τόπο μπορεί, μετά από μερικές πράξεις να γραφεί

$$x^2 + y^2 = x \implies \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

Ένας κατάλληλος μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες είναι ο ακόλουθος

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=\cos \theta} (1 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho \right] d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\left(-\frac{1}{3} \right) \int_{\rho=0}^{\rho=\cos \theta} d(1 - \rho^2)^{3/2} \right] d\theta \\ &= -\frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} ((1 - \cos^2 \theta)^{3/2} - 1) d\theta = -\frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (|\sin \theta|^3 - 1) d\theta \\ &= -\frac{2}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\sin \theta^3 - 1) d\theta = -\frac{2}{3} \frac{1}{6} (4 - 3\pi) = \frac{3\pi - 4}{9} \end{aligned}$$

Τυπόδειξη: Ένας δεύτερος μετασχηματισμός είναι ο παρακάτω

$$x = \frac{1}{2} + \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

και τότε το ολοκλήρωμα θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int (1 - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\int_{\rho=0}^{1/2} \left(\frac{3}{4} - \rho^2 - \rho \cos \theta \right)^{1/2} \rho d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

Το παραπάνω όμως ολοκλήρωμα, μπορεί σε σχέση με το προηγούμενο ολοκλήρωμα να έχει ανεξάρητες ως προς την ολοκλήρωση τις μεταβλητές ρ και θ αλλά εξαιτείας της ολοκληρωτέας συνάρτησης $(\frac{3}{4} - \rho^2 - \rho \cos \theta)^{1/2}$ είναι δυσκολότερο να υπολογιστεί. Ο υπολογισμός του αφήνεται σαν άσκηση.

Άσκηση 3. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται εκτός του παραβολοειδούς $x^2 + y^2 = az$, εντός του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2ax$ και πάνω από το επίπεδο xOy .

Λύση: Όπως φαίνεται στο σχήμα τον κύλινδρο σκεπάζει η επιφάνεια του παραβολοειδούς, ενώ ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι η βάση του κυλίνδρου. Η καμπύλη που περιβάλλει τον τόπο μπορεί, μετά από μερικές πράξεις να γραφεί

$$x^2 + y^2 = 2ax \implies (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

Ένας κατάλληλος μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες είναι ο ακόλουθος

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Συνεπώς ο όγκος του στερεού θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int \frac{x^2 + y^2}{a} dx dy = \int_G \int \frac{1}{a} \rho^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{a} \int_{\theta=\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_{\rho=0}^{2a \cos \theta} \rho^3 d\rho \right] d\theta = \frac{1}{a} \frac{1}{4} (2a)^4 \int_{\theta=\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 16a^3 \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi a^3}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού του πρώτου ογδόου των αξόνων που ορίζεται από την κυλινδρική επιφάνεια $x^2 + y^2 = a^2$ και από το επίπεδο $z = x + y$.

Λύση: Ο όγκος του παραπάνω στερεού περιορίζεται από πάνω από την επιφάνεια $z = x + y$ και από κάτω από το επίπεδο Oxy . Επίσης ο όγκος προβάλλεται στον τόπο D που είναι το το κομμάτι του κυκλικού δίσκου $x^2 + y^2 = a^2$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημέριο. Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες με τα αντίστοιχα όρια, δηλαδή

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Ο όγκος του στερεού υπολογίζεται ως εξείς

$$\begin{aligned} V &= \int_D \int (x + y) dx dy = \int_G \int (\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\rho=0}^a \rho^2 d\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} (\cos \theta + \sin \theta) = \frac{1}{3} a^3 \cdot 2 = \frac{2a^3}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_D \int (x - 2y) dx dy$ όπου D ο τόπος που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = R^2$, την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

και τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy ($a, b > R$).

Λύση: α' τρόπος: Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$I = I_e - I_c = \int_{D_e} \int (x - 2y) dx dy - \int_{D_c} \int (x - 2y) dx dy$$

όπου D_e και D_c οι περιοχές που περικλείονται από την έλλειψη (και τους θετικούς ημιάξονες) και τον κύκλο (και τους θετικούς ημιάξονες). Για το υπολογισμό του ολοκληρώματος I_e επιλέγουμε την παραμετροποίηση

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta, \quad dx dy = ab\rho d\rho d\theta, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

και για το I_c την

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Θα έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} I &= \int_{D_e} \int (x - 2y) dx dy - \int_{D_c} \int (x - 2y) dx dy \\ &= \int_{D_e} \int (a\rho \cos \theta - 2b\rho \sin \theta) ab\rho d\rho d\theta \\ &\quad - \int_{D_c} \int (\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^1 a^2 b \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^1 2ab^2 \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \\ &\quad - \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^R \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^R 2\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta \right) \\ &= \frac{a^2 b}{3} - \frac{2b^2 a}{3} - \left(\frac{R^3}{3} - 2\frac{R^3}{3} \right) = \frac{ab}{3}(a - 2b) + \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

β' τρόπος¹: Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα του Green. Έτσι σύμφωνα με τον τύπο του Green έχουμε

$$I = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_c P dx + Q dy$$

Αν επιλέξουμε ως κλειστή καμπύλη (στη πρώτη τεταρημόριο πάντα) αυτή που αποτελείται από τις περιφέρειες της έλλειψης και του κύκλου και από τους άξονες $x = 0$ και $y = 0$ και επίσης επιλέξουμε $P = y^2 - xy$ και $Q = 0$ θα έχουμε

$$I = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \int (x - 2y) dx dy = \oint_c (y^2 - 2x) dx$$

¹Η λύση αυτή απαιτεί τη γνώση του θεωρήματος Green το οποίο παρουσιάζεται στο 5ο Κεφάλαιο. Ο αναγνώστης μπορεί να παραλείψει αρχικά την παρακάτω λύση και να επανέλθει αφού κατανοήσει το θεώρημα του Green

Η καμπύλη πάνω στην οποία υπολογίζεται το ολοκλήρωμα περιλαμβάνει τις c_e , c_c , $x = 0$ και $y = 0$. Προφανώς όμως τα ολοκληρώματα στους άξονες $x = 0$ και $y = 0$ δεν συνεισφέρουν αφού η ποσότητα P μηδενίζεται πάνω σε αυτές. Απομένει ο υπλογισμός πάνω στις πεειφέρεις της έλλειψης και του κύκλου. Επιλέγουμε αντίστοιχα τις παρακάτω παραμετροποιήσεις

$$c_e : x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$c_c : x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Θα έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} I &= \oint_c (y^2 - 2x) dx = \int_{c_e} (y^2 - 2x) dx + \int_{c_c} (y^2 - 2x) dx \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} (b^2 \sin^2 \theta - ab \cos \theta \sin \theta) (-a \sin \theta) d\theta \\ &\quad + \int_{\theta=-\pi/2}^0 (R^2 \sin^2 \theta - 2R^2 \cos \theta \sin \theta) (-R \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{2b^2 a}{3} + \frac{a^2 b}{3} + \left(-\frac{R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{ab}{3}(a - 2b) + \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $z = x$, $z \geq 0$

Λύση: Ο όγκος του στερεού εντοπίζεται στο εσωτερικού του κυλίνδρου $x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ ο οποίος περικλείεται από τις επιφάνειες $z_1 = z = 0$ (από κάτω) και $z_2 = z = x$ (από πάνω). Προφανώς η προβολή του τόπου, D στο επίπεδο xy είναι ο κυκλικός δίσκος $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Θα έχουμε συνεπώς

$$V = \int_D \int (z_2 - z_1) dx dy = \int_D \int x dx dy$$

Ένας κατάλληλος μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες είναι ο εξής

$$x = 1 + \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

με προφανή όρια

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ο όγκος συνεπώς θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int_D \int x dx dy = \int_G \int (1 + \rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho + \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_{\rho=0}^1 \rho^2 d\rho = \pi + 0 = \pi \end{aligned}$$

Τυπόδειξη: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον παρακάτω μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

όπου σε αυτήν τη περίπτωση τα όρια δεν είναι προφανή και υπολογίζονται ως εξής

α) Από την εξίσωση του κυκλικού δίσκου και απαιτώντας $0 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ θα έχουμε $0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$ και επίσης

β) απαιτώντας $\rho = 2 \cos \theta = 0$ θα έχουμε $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ και $\arccos -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Το ολοκλήρωμα πλέον γίνεται

$$\begin{aligned} V &= \int_D \int x dx dy = \int_G \int (\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\rho=0}^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} (2 \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{8}{3} \frac{3\pi}{8} = \pi \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί, με την χρήση διπλού ολοκληρώματος, ο όγκος του ελλειψειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ($a, b, c > 0$) .

Λύση: Ο όγκος που πρέπει να υπολογιστεί είναι το διπλάσιο του όγκου που βρίσκεται στην περιοχή $z \geq 0$. Η προβολή επίσης του ελλειψειδούς στο επίπεδο xy θα είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε περικλείεται τώρα από τις επιφάνειες $z_1 = z = 0$ (από κάτω) και $z_2 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ (από πάνω) και ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = 2 \int_D \int (z_2 - z_1) dx dy = 2 \int_D \int c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

Ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι η η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και χρησιμοποιώντας την παρακάτω μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες

$$x = a \rho \cos \theta, \quad y = b \rho \sin \theta, \quad dx dy = ab \rho d\rho d\theta$$

με όρια

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_D \int c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 2c \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \sqrt{1 - \rho^2} ab \rho d\rho d\theta \\ &= 2abc \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\rho=0}^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = 2abc \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{4abc\pi}{3} \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Ο όγκος του παραπάνω ελλειψειδούς μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τριπλό ολοκλήρωμα και μετατροπή σε σφαιρικές συντεταγμένες. Ο υπολογισμός του θα γίνει στο 4ο Κεφάλαιο.

0.2 ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \int \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$$

όπου V είναι ο όγκος ο οποίος περικλείεται από την επιφάνεια του κυλινδρού $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και του επιπέδου $z = 3$.

Λύση: Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάνοντας μετατροπή σε κυλινδρικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad dx dy dz = \rho d\rho dz d\theta$$

Το ολοκλήρωμα τώρα γράφεται

$$I = \int \int \int_{V_G} \sqrt{\rho^2 + z^2} \, \rho d\rho dz d\theta$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα τα όρια του ρ είναι $0 \leq \rho \leq z$ και επίσης αντίστοιχα για το z και την γωνία θ είναι $0 < z < 3$ και $0 < \theta < 2\pi$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 \int_{\rho=0}^z \sqrt{\rho^2 + z^2} \, \rho d\rho dz d\theta$$

Το ολοκλήρωμα ως προς ρ δίνει

$$I_\rho = \int_{\rho=0}^z \sqrt{\rho^2 + z^2} \, \rho d\rho = \frac{1}{3} [(\rho^2 + z^2)^{3/2}]_{\rho=0}^z = \frac{z^3}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

Το ολοκλήρωμα I , και αφού διπιστώνουμε ότι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης z και θ είναι ανεξάρτητες, υπολογίζεται ως εξείς

$$I = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{z=0}^3 z^3 dz = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) 2\pi \frac{81}{4} = \frac{27\pi(2\sqrt{2} - 1)}{2}$$

Άσκηση 2. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται μεταξύ των συντεταγμένων επιπέδων και το επίπεδο $x + 2y + 3z = 4$ για $x, y, z \geq 0$

Λύση: Ο ογκος του στερεού υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$I_V = \int \int \int_V \, dx dy dz$$

αφού καθοριστούν τα όρια ολοκλήρωσης. Ο όγκος περιβάλλεται από τις επιφάνειες $z = 0$ και $z = \frac{1}{3}(4 - x - 2y)$ και επίσης προβάλλεται στο επίπεδο Oxy στην τριγωνική επιφάνεια D_{xy} που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x + 2y = 4$. Το ολοκλήρωμα συνεπώς γίνεται

$$I_V = \int \int_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{\frac{1}{3}(4-x-2y)} dz \right) dx dy = \int \int_{D_{xy}} \frac{1}{3} (4 - x - 2y) \, dx dy$$

Το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια D_{xy} που προκύπτει, υπολογίζεται θεωρώντας ότι τα όρια του y και του x είναι αντίστοιχα (αν επιλέξουμε φυσικά πρώτα την ολοκλήρωση ως προς y) $0 < y < (4-x)/2$ και $0 < x < 4$, δηλαδή είναι

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{1}{3} \int_{x=0}^4 \left(\int_{y=0}^{(4-x)/2} (4-x-2y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{x=0}^4 (4-2x + \frac{x^2}{4}) dx = \frac{1}{3} \frac{16}{3} = 16 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τα επίπεδα $y+z=4$, $x=0$, $z=0$ και τον κύλινδρο $y=x^2$.

Λύση: Ο ζητούμενος όγκος φαίνεται στο σχήμα.. Ο όγκος αυτός περικλείεται παράπλευρα από τις επιφάνειες $x=0$ και $y=x^2$, από πάνω από την επιφάνεια $z=4-y$ και από κάτω από την επιφάνεια $z=0$. Η προβολή του όγκου στο επίπεδο xy είναι τόπος D ο οποίος περιβάλλεται από τις καμπύλες $x=0$, $y=4$ και $y=x^2$. Ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται από το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \int \int_D \int dx dy dz = \int_D \int \left(\int_{z=0}^{z=4-y} dy \right) dx dy = \int_D \int (4-y) dx dy \\ &= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=x^2}^4 (4-y) dy \right) dx = \int_{x=0}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{128}{15} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Λύση: Για τον υπολογισμό του όγκου ως χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = ar \cos \phi \sin \theta, \quad y = br \sin \phi \sin \theta, \quad z = cr \cos \theta, \quad dV = abcr^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$$

με τα αντίστοιχα όρια

$$0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Ο όγκος υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int \int_V \int dV = \int \int_G \int abcr^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= abc \int_{r=0}^1 r^2 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = abc \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} abc \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το παραβολοειδές $x^2 + y^2 = 4z$ και το επίπεδο $z = y + 3$.

Λύση: Ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε φαίνεται στο σχήμα... Περικλείεται από κάτω από την επιφάνεια $z_1 = \frac{x^2 + y^2}{4}$ και από πάνω από την $z_2 = y + 3$. Η προβολή του παραπάνω όγκου στο επίπεδο xy περικλείεται από την καμπύλη εκείνη που προκύπτει από την απαλειφή του z ανάμεσα στις δύο παραπάνω επιφάνειες και είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + (y - 2)^2 = 4^2$. Ο όγκος υπολογίζεται τώρα από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int \int_V \int dxdydz = \int_D \int \left(\int_{z=\frac{x^2+y^2}{4}}^{y+3} dz \right) dxdy \\ &= \int_D \int \left(y + 3 - \frac{x^2 + y^2}{4} \right) dxdy \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω διπλού ολοκληρώματος ως χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω πολικές συντεταγμένες

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = 2 + \rho \sin \theta, \quad dxdy = \rho d\rho d\theta$$

με όρια

$$0 \leq \rho \leq 4, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Τώρα ως έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \int_G \int \left(5 + \rho \sin \theta - \frac{1}{4}(\rho^2 + 4 + 4\rho \sin \theta) \right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_G \int \left(4 - \frac{\rho^2}{4} \right) \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\rho=0}^4 \left(4 - \frac{\rho^2}{4} \right) \rho d\rho \\ &= 2\pi \cdot 16 = 32\pi \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Να υπολογισθεί με τριπλή ολοκλήρωση ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z > 0$$

Λύση: Επειδή ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι τμήμα σφαιρικών είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$$

Τα όρια των μεταβλητών ρ και ϕ είναι προφανή, δηλαδή

$$1 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Τα όρια της γωνίας θ υπολογίζονται ως εξής: Το μέγιστο της γωνίας θ αντιστοιχεί στην γωνία a του κώνου η οποία δίνεται από την σχέση $\tan a = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \rightarrow a = \frac{\pi}{4}$.

Συνεπώς $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Ο όγκος υπολογίζεται πλέον από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int \int_V \int dV = \int \int_G \int r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= \int_{r=1}^4 r^2 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/4} \sin \theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= 21 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\pi = 21\pi(4 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \int_V \int \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

όπου η στερεά περιοχή V περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = ax$ και $z^2 = x^2 + y^2$.

Λύση: Ο ζητούμενος τόπος ολοκλήρωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα..., περικλείεται πλάγια από την κυλνδρική επιφάνεια $x^2 + y^2 = ax \rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$, από κάτω από την επιφάνεια $z = 0$ και από πάνω από την $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Η προβολή του όγκου στο επίπεδο xy είναι ο κυκλικός δίσκος $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$. Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται!

$$\begin{aligned} I &= \int \int_V \int \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_D \int \left(\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz \right) dx dy \\ &= \int_D \int (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

με αντίστοιχα όρια

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq ax \rightarrow 0 \leq \rho \leq a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Τώρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int (x^2 + y^2) dx dy = \int_G \int \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{a \cos \theta} \rho^3 d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{a^4}{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi a^4}{16} \end{aligned}$$

Άσκηση 8. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται εξωτερικά του κώνου $x^2 + y^2 = z^2$ και εσωτερικά της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Λύση: Ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι, λόγω συμμετρίας, το διπλάσιο του

όγκου που υπάρχει στην περιοχή $z \geq 0$. Έτσι θα εργαστούμε σε αυτή την περιοχή και ο συνολικός όγκος θα αντιστοιχεί στο διπλάσιο αυτού του όγκου. Επειδή ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι τμήμα σφαιρικών προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$$

Τα όρια των μεταβλητών r και ϕ είναι προφανή, δηλαδή

$$1 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Τα όρια της γωνίας θ υπολογίζονται ως εξής: Το ελάχιστο (στην περιοχή του όγκου που μας ενδιαφέρει) της γωνίας θ αντιστοιχεί στην γωνία a του κώνου η οποία δίνεται από την σχέση $\tan a = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \rightarrow a = \frac{\pi}{4}$. Συνεπώς $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$. Ο όγκος υπολογίζεται πλέον από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} V &= \int \int_V \int dV = \int \int_G \int r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^2 dr \cdot \int_{\theta=\pi/4}^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{2^{2/3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Ο συνολικός όγκος θα είναι $V_{all} = 2V = \frac{8\pi}{3}$.

Άσκηση 9. Να υπολογιστεί με εφαρμογή του θεωρήματος του Green το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

όπου c περιφέρεια έλλειψης με εξίσωση $x^2 + 4y^2 = 4$

Λύση: Επειδή οι συναρτήσεις

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ορίζονται παντού στο επίπεδο Oxy εκτός από το σημείο $0,0$ ο τόπος D που περιβάλλεται από την έλλειψη είναι ενας πολλαπλά συνεκτικός τόπος. Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ετσι σύμφωνα με την θεωρία των πολλαπλά συνεκτικών τόπων στους οποίους ισχύει η παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατα μήκος οποισδήποτε κλειστής γραμμής που περιέχει το σημείο $0,0$. Επιλέγουμε για παράδειγμα να το υπολογίσουμε κατα μήκος της περιφέρειας του κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$.

Ετσι, κάνοντας την παραμετροποίηση του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες θα έχουμε

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta$$

και επίσης

$$P = \frac{-a \sin \theta}{a^2}, \quad Q = \frac{a \cos \theta}{a^2}$$

. Το ολοκλήρωμα τωρα θα γράφεται

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \sin \theta}{a^2}(-a \sin \theta) + \frac{a \cos \theta}{a^2}(a \cos \theta) \right] d\theta = \int_0^{2\pi} = 0$$

0.3 ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Αν c είναι η περιφέρεια $x^2 + y^2 = a^2$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\oint -x^2y dx + xy^2 dy$

α) κατ' ευθείαν

β) εφαρμόζοντας τον τύπο του Green

Λύση:

α) Η περιφέρεια του κύκλου μπορεί να παραμετροποιηθεί με τον γνωστό τρόπο ως εξείς

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad \dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

και συνεπώς το ολκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \oint -x^2y dx + xy^2 dy \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} [-(a \cos t)^2(a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \sin t)^2(a \cos t)] dt \\ &= 2a^4 \int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{a^4}{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{a^4}{4} \int_{x=0}^{4\pi} \sin^2(x) dx = \frac{a^4}{4} 2\pi = \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

β) Οι συναρτήσεις $P(x, y) = -x^2y$ και $Q(x, y) = xy^2$ είναι συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους και επίσης

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green στην κλειστή καμπύλη c που περιβάλει την επιφάνεια κυκλικού δίσκου με ακτίνα a θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \oint -x^2y dx + xy^2 dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (y^2 + x^2) dx dy = \int_{t=0, 2\pi} \int_{\rho=0}^a \rho^2 d\rho dt \\ &= \int_{\rho=0}^a \rho^3 d\rho \int_{t=0}^{2\pi} dt = \frac{\pi a^4}{2} \end{aligned}$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα εφαρμόσαμε μετατροπή σε πολικές συντεγμένες, δηλαδή

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t, \quad dx dy = \rho d\rho dt$$

Άσκηση 2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

α) κατά μήκος της περιμέτρου του τριγώνου ABG με κορυφές τα σημεία $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ και $G(3, 0)$

β) κατά μήκος της περιφέρειας $x^2 + y^2 = a^2$

γ) κατά μήκος της περιφέρειας $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$

Λύση:

α) Οι συναρτήσεις

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

ορίζονται παντού στο εσωτερικό του τριγώνου ABG . Συβεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Green. Επιπλέον έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Συνεπώς είναι

$$I = \oint \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int \int_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_{D_{xy}} 0 = 0$$

β) Στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου υπάρχει το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ όπου οι συναρτήσεις P και Q δεν ορίζονται. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να εγαρμόζουμε το Θεώρημα του Green και πρέπει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Επειδή τώρα συμβαίνει να είναι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιέχει όμως το ανώμαλο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Η περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = a^2$ είναι μια δυνατή περίπτωση και είναι από τις προτιμότερες εξαιτείας της εύκολης παραμετροποίησης της αλλά όπως όταν δουμε και παρακάτω της απλοποίησης των συναρτήσεων P και Q . Έτσι θα έχουμε

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad \dot{x} = -a \sin t, \quad \dot{y} = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \oint \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \left(\frac{-(a \sin t)}{a^2}(-a \sin t) + \frac{(a \cos t)}{a^2}(a \cos t) \right) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

γ) Η καμπύλη $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ γράφεται επίσης $(x+2)^2 + y^2 = 1$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου ακτίνας 1 με κέντρο το σημείο $(x, y) = (-2, 0)$. Όπως εύκολα διαπιστώνουμε ο παραπάνω κυκλοκός δίσκος περιέχει το ανώμαλο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Με δοδομένο όμως ότι ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιέχει το σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Μια τέτεια καμπύλη είναι η περιφέρεια $x^2 + y^2 = a^2$ της περίπτωσης β). Συνεπώς το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\oint_{c:x^2+y^2+4x+3=0} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{c:x^2+y^2=a^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

όπου c είναι η κλειστή καμπύλη που σχηματίζεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $x = y^2$.

Λύση: Οι συναρτήσεις $P(x, y) = 2xy - x^2$ και $Q(x, y) = x + y^2$ του παραπάνω ολοκληρώματος πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Green και επιπλέον έχουμε $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ και $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε ένα διπλό ολοκλήρωμα με τόπο ολκλήρωσης D_{xy} την περιοχή που περιβάλλεται από τις παραβολές $y = x^2$ και $x = y^2$ και συνεπώς με όρια $0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \oint (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy = \int \int_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} (x^{1/2} - x^2 - 2x^{3/2} + 2x^{5/2}) dx \\ &= \frac{11}{105} \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Να επαληθευτεί ο τύπος του Green για το ολοκλήρωμα

$$I = \oint (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

όπου c είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $\Gamma(0, 2)$.

Λύση: Για να επαληθεύσουμε το θεώρημα του Green πρέπει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και το αντίστοιχο διπλό ολοκλήρωμα και να βρούμε την ίδια τιμή

α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος του τετραγώνου ΑΒΓΔ γράφεται

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{c:OAB\Gamma O} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\
 &= \int_{c:O \rightarrow A} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\
 &\quad + \int_{c:A \rightarrow B} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\
 &\quad + \int_{c:B \rightarrow \Gamma} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy \\
 &\quad + \int_{c:\Gamma \rightarrow O} (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy
 \end{aligned}$$

Επειδή η κίνηση περιμετρικά του τετραγώνου γίνεται παρράλληλα των αξόνων Ox και Oy μπορούμε ευκολά να υπολογίσουμε τα παραπάνω ολοκληρώματα θεωρώντας για παράδειγμα ότι κατά μήκος του άξονα Ox η μεταβλητή y παραμένει σταθερή και μεταβάλλεται μόνο η x . Εποι θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{c:O \rightarrow A} (x^2 - xy^3)dx + \int_{c:A \rightarrow B} (y^2 - 2xy)dy \\
 &\quad + \int_{c:B \rightarrow \Gamma} (x^2 - xy^3)dx + \int_{c:\Gamma \rightarrow O} (y^2 - 2xy)dy \\
 &= \int_{x=0}^2 (x^2 - x(0)^3)dx + \int_{y=0}^2 (y^2 - 2(2)y)dy \\
 &\quad + \int_{x=2}^0 (x^2 - x(2)^3)dx + \int_{y=2}^0 (y^2 - 2(0)y)dy \\
 &= \frac{8}{3} - \frac{16}{3} + \frac{40}{3} - \frac{8}{3} = 8
 \end{aligned}$$

β) Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$P(x, y) = x^2 - xy^3, \quad Q(x, y) = y^2 - 2xy$$

και επίσης ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y + 3xy^2$$

το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται σύμφωνα με το θεώρημα Green

$$\begin{aligned}
 I &= \oint (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^2 (-2y + 3xy^2) dy \right) dx = \int_{x=0}^2 (-4 + 8x) dx = 8
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και η ευθεία $y = x + 2$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τόπου που ορίζεται από την τομή τους με τη χρήση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του Green

Λύση: Το εμβαδόν, όπως είναι γνωστό από την θεωρία, δίνεται από την σχέση

$$S = \frac{1}{2} \int_c -ydx + xdy$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το σύνορο του τόπου, του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν, αποτελείται από δύο διαφορετικές καμπύλες και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \int_{c_1} -ydx + xdy + \frac{1}{2} \int_{c_2} -ydx + xdy$$

Αναλυτικά θα έχουμε, επιλέγοντας την ορθή φορά διαγραφής του συνόρου
 c_1 : Η καμπύλη c_1 παραμετροποιήται ως εξείς

$$c_1 = \{x = t, y = t^2, \quad -1 \leq t \leq 2\}$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{c_1} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_{t=-1}^{t=2} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=-1}^{t=2} (-t^2(1) + t(2t)) dt = \frac{1}{2} \int_{t=-1}^{t=2} t^2 dt = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

c_2 : Η καμπύλη c_2 παραμετροποιήται ως εξείς

$$c_2 = \{x = t, y = t + 2, \quad 1 \leq t \leq -2\}$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_{c_1} -ydx + xdy = \frac{1}{2} \int_{t=1}^{t=-2} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=1}^{t=-2} (-(t+2)(1) + t(1)) dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=1} -2dt = 3 \end{aligned}$$

Συνολικά συνεπώς θα έχουμε

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

Άσκηση 6. Να υπολογισθεί με τη βοήθεια κατάλληλων επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων το εμβαδό του τόπου:

$$D_{xy} = \left[(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 5^2, \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} \geq 1 \right]$$

Λύση: Το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε θα είναι $S = S_1 - S_2$ όπου S_1 το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και S_2 το εμβαδόν της έλλειψης.

Εμβαδόν S_1 : Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green γνωρίζουμε ότι

$$S_1 = \frac{1}{2} \oint -ydx + xdy$$

Η παραμετροποίηση της περιφέρειας του κυκλικού δίσκου θα είναι

$$x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

συνεπώς θα είναι

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{t=0}^{2\pi} \left((-5 \sin t)(-5 \sin t) + (5 \cos t)(5 \cos t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} 25 dt = 25\pi \end{aligned}$$

Εμβαδόν S_2 : Το εμβαδόν S_2 θα δίνεται επίσης από τον τύπο

$$S_2 = \frac{1}{2} \oint -ydx + xdy$$

Η παραμετροποίηση της περιφέρειας της έλλειψης θα είναι

$$x = 4 \cos t, y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

συνεπώς θα είναι

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{t=0}^{2\pi} \left((-3 \sin t)(-4 \sin t) + (4 \cos t)(3 \cos t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} 12 dt = 12\pi \end{aligned}$$

Συνεπώς συνολικά θα είναι

$$S = S_1 - S_2 = 25\pi - 12\pi = 13\pi.$$

Άσκηση 7. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I = \int_A^B (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$$

όπου $A(1,0)$ και $B(2,1)$

α) Να δειχθεί ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη που ενώνει τα A και B

β) Να βρεθεί μία συνάρτηση $U = U(x,y)$ τέτοια ώστε

$$dU = (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$$

γ) Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος I

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Πράγματι έχουμε εφόσον

$$P(x, y) = 2xy - y^4 + 3, \quad Q(x, y) = x^2 - 4xy^3$$

ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3$$

β) Εφόσον, όπως δείξαμε παραπάνω, το ολοκλήρωμα είναι ανεξαρτητο του δρόμου όταν υπάρχει συνάρτηση $U(x, y)$ τέτεια ώστε $dU = (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$. Επιπλέον επειδή γενικότερα είναι

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy - y^4 + 3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - 4xy^3$$

Θα έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2xy - y^4 + 3 \Rightarrow U = \int (2xy - y^4 + 3)dx = yx^2 - xy^4 + 3x + C(y) \\ &\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - 4xy^3 + \frac{\partial C(y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Συγχρίνοντας την παραπάνω σχέση με την ήδη υπάρχουσα όταν πρέπει να είναι

$$\frac{\partial C(y)}{\partial y} = 0$$

δηλαδή η συνάρτηση C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα όταν έχουμε $U(x, y) = yx^2 - xy^4 + 3x + C$.

Η συνάρτηση $U(x, y)$ μπορεί να υπολογιστεί εναλλακτικά από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$U(x, y) = \int_{A(1,0)}^{B(x,y)} (2x'y' - y'^4 + 3)dx' + (x'^2 - 4x'y'^3)dy' + C$$

θεωρώντας το ενδιάμεσο σημείο $K(x, 0)$. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_{A(1,0)}^{B(x,y)} (2x'y' - y'^4 + 3)dx' + (x'^2 - 4x'y'^3)dy' + C \\ &= \int_{A(1,0)}^{K(x,0)} (2x'(0) - (0)^4 + 3)dx' \\ &+ \int_{K(x,0)}^{B(x,y)} (x^2 - 4xy'^3)dy' = 3x + yx^2 - xy^4 + C \end{aligned}$$

γ) Το ολοκλήρωμα γράφεται επίσης

$$\begin{aligned} I &= \int_A^B (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_A^B dU(x, y) = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A) \\ &= (1)(2)^2 - (2)(1)^4 + 3(2) + C - ((0)(1)^2 - (1)(0)^4 + 3(1) + C) = 5 \end{aligned}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εναλλακτικά θεωρώντας το ενδιάμεσο σημείο $K(2,0)$. Το ολοκλήρωμα θα γράφεται πλέον

$$\begin{aligned} I &= \int_A^B (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_{A \rightarrow K} (2xy - y^4 + 3)dx + \int_{K \rightarrow B} (x^2 - 4xy^3)dy \\ &= \int_{x=1}^2 (2x(0) - (0)^4 + 3)dx + \int_{y=0}^1 ((2)^2 - 4(2)y^3)dy = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Άσκηση 8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_S \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$, όπου $\vec{F} = 18z\vec{i} - 12\vec{j} + 3y\vec{k}$ και S η επιφάνεια $2x + 3y + 6z = 12$ για $x, y, z \geq 0$

Λύση: α' τρόπος: Η επιφάνεια S πάνω στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, προβάλλεται στο επίπεδο xy στην τριγωνική επιφάνεια D_{xy} που περικλείεται από τις καμπύλες $x = 0$, $y = 0$ και $2x + 3y = 12$. Επίσης είναι

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{7}(2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k})$$

και

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{7}{6} dx dy$$

Το ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{D_{xy}} \int (18z\vec{i} - 12\vec{j} + 3y\vec{k}) \left(\frac{1}{7}(2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) \right) \frac{7}{6} dx dy \\ &= \int_{D_{xy}} \int (6 - 2x) dx dy = \int_{x=0}^6 \int_{y=0}^{4\frac{2}{3}x} (6 - 2x) dx dy = 24 \end{aligned}$$

β' τρόπος: Το ολοκλήρωμα μπορεί επίσης να γραφεί ως εξής

$$I = (\pm) \int_{D_{yz}} \int 18z dy dz + (\pm) \int_{D_{xz}} \int (-12) dx dz + (\pm) \int_{D_{xy}} \int 3y dx dy$$

όπου D_{yz}, D_{xz} και D_{xy} είναι οι προβολές της επιφάνειας S αντίστοιχα στα επίπεδα yz , xz και xy . Σε κάθε μία περίπτωση οι αντίστοιχοι τόποι και τα αντίστοιχα πρόσημα θα είναι

$$D_{yz} = \{(y, z) \in R^2, \quad y, z \geq 0, \quad 3y + 6z \leq 12, \quad \cos \alpha = \vec{\eta} \cdot \vec{i} = \frac{2}{7} > 0\}$$

$$D_{xz} = \{(x, z) \in R^2, \quad x, z \geq 0, \quad 2x + 6z \leq 12, \quad \cos \beta = \vec{\eta} \cdot \vec{j} = \frac{3}{7} > 0\}$$

$$D_{xy} = \{(x, y) \in R^2, \quad x, y \geq 0, \quad 2x + 3y \leq 12, \quad \cos \gamma = \vec{\eta} \cdot \vec{j} = \frac{6}{7} > 0\}$$

και το ολοκλήρωμα πλέον υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=0}^4 \int_{z=0}^{2-\frac{y}{2}} 18z dy dz + \int_{x=0}^6 \int_{z=0}^{3-\frac{x}{3}} (-12) dx dz \\ &+ \int_{x=0}^6 \int_{y=0}^{4-\frac{2x}{3}} 3y dx dy = 48 - 72 + 48 = 24 \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας α) τον τύπο του Gauss και β) τον τύπο του Stokes

Άσκηση 9. Να υπολογιστεί το κλειστό ολοκλήρωμα $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

α) Ως επιεπειφάνειο ολοκλήρωμα α' τύπου

β) Με τη βοήθεια του τύπου του Gauss

Λύση:

α) Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας αν χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = a \cos \phi \sin \theta, \quad y = a \sin \phi \sin \theta, \quad z = a \cos \theta, \quad d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

με όρια

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_G a^2 a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= a^4 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = a^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a^4 \end{aligned}$$

β) Σύμφωνα με τον τύπο του Gauss έχουμε

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV$$

Συγκρίνοντας το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης με το ολοκλήρωμα που έχουμε να υπολογίσουμε συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει η συνάρτηση \vec{F} να ικανοποιεί την σχέση $\vec{F} \cdot \vec{\eta} = (x^2 + y^2 + z^2)$. Επειδή τώρα για $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ θα έχουμε ότι

$$\vec{\nabla} \Phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad |\vec{\nabla} \Phi| = 2a, \quad \vec{\eta} = \frac{1}{a} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

εύκολα συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\vec{F} = a (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. Συνεπώς από τον παραπάνω τύπο του Gauss, και χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 3a \iint_V \int dx dy dz \\ &= 3a \int_G \int \int r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 3a \int_{r=0}^a r^2 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= 3a \frac{4}{3} a^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi a^4 \end{aligned}$$

Άσκηση 10. Να βρεθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$ από

α) Το τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 = 4$ που αποκόπτεται από τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 1$

β) Από το σύνορο του στερεού κυλινδρου $x^2 + y^2 \leq 4$ που αποκόπτεται από τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 1$.

Λύση:

α) Έχουμε να υπολογίσουμε το επιεπειφάνειο ολοκλήρωμα $I = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί εύκολα χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες. Έτσι η επιφάνεια του κυλινδρου παραμετροποιείται ως εξείς

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta, \quad z = z, \quad d\sigma = 2d\theta dz$$

με όρια

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1$$

Επειδή τώρα για $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ θα έχουμε ότι

$$\vec{\nabla} \Phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}, \quad |\vec{\nabla} \Phi| = 4, \quad \vec{\eta} = \frac{1}{2} (x\vec{i} + y\vec{j})$$

το ολοκλήρωμα θα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_S \frac{1}{2} (x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \int \int_G \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2d\theta dz = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{z=0}^1 dz = 8\pi \end{aligned}$$

β) Στην περίπτωση αυτή ικανοποιούνται τα χριτήρια του Θεωρήματος του Gauss όπου έχουμε την κλειστή επιφάνεια S που αποτελείται από την κυλινδρική επιφάνεια και τις επιφάνειες των επιπέδων $z = 0$ και $z = 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες όπου βέβαια είναι

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = \rho d\rho d\theta dz$$

με όρια

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1$$

Έτσι σύμφωνα με τον τύπο του Gauss το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int \int_V \text{div} \vec{F} dV \\ &= \int \int_S (1 + 1 + 2z) dV = 2 \int \int_G (1 + z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= 2 \int_{\rho=0}^2 \rho d\rho \cdot \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{z=0}^1 (1 + z) dz = 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 12\pi \end{aligned}$$

0.4 ΕΠΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Άσκηση 1. Να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ όπου η επιφάνεια S είναι το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση: Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$I = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

α) *Τηπολογισμός του επικαμπύλου ολοκληρώματος*

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται κατά μήκος της καμπύλης c η οποία βρίσκεται πανω στο επίπεδο Oxy και ταυτίζεται με την περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$. Εκτελώντας την παραμετροποίηση

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι κατα μήκος c είναι $z = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c zdx + xdy + ydz = \int_{t=0}^{2\pi} \left[z(t) \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} + y \frac{dz}{dt} \right] dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} [0 \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot (\cos t) + \sin t \cdot 0] dt = \int_{t=0}^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \end{aligned}$$

β) *Τηπολογισμός του επιεπιφάνειου ολοκληρώματος*

Λαμβάνοντας υπόψη ότι i)

$$\text{rot} \vec{F} = (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

ii) επίσης ότι για $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ θα έχουμε

$$\vec{\nabla} \Phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad |\vec{\nabla} \Phi| = 2, \quad \vec{\eta} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

iii) και ότι για $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{z} dx dy$$

θα έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{D_{xy}} \int (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \frac{1}{z} dx dy \\ &= \int_{D_{xy}} \int (x+y+z) \frac{1}{z} dx dy \\ &= \int_{D_{xy}} \int (x+y+\sqrt{1-x^2-y^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \end{aligned}$$

όπου στην παραπάνω σχέση ο τόπος D_{xy} προφανώς ταυτίζεται με τον κυκλικό δίσκο περιφέρειας $x^2 + y^2 = 1$. Στις περιπτώσεις αυτές, όπως συνηθίζουμε, κάνουμε μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες και θα έχουμε συνεπώς

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t, \quad dx dy = \rho d\rho dt$$

και το ολοκλήρωμα γράφεται πλέον

$$\begin{aligned} I &= \int_G \int \frac{\rho \cos t + \rho \sin t + \sqrt{1 - \rho^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho dt \\ &= \int_G \int \frac{\rho \cos t + \rho \sin t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho dt + \int_G \int \rho d\rho dt \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \frac{\rho \cos t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho dt + \int_{\rho=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \frac{\rho \cos t}{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho d\rho dt \\ &+ \int_{\rho=0}^1 \int_{t=0}^{2\pi} \rho d\rho dt = 0 + 0 + \pi = \pi \end{aligned}$$

Συνεπώς το θεώρημα του Stokes επαληθεύτηκε.

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση $\vec{F} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ και η επιφάνεια S , με εξίσωση $z = (x^2 + y^2)/2$. Έστω c η καμπύλη που είναι η τομή της επιφάνειας S , με το επίπεδο $z = 2$. Να γίνει επαλήθευση του τύπου του Stokes

Λύση: Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την σχέση

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

α) Υπολογισμός του επιεπειφάνειου ολοκλρώματος

(i) Έχουμε ότι

$$\text{rot} \vec{F} = (z^2 + x)\vec{i} + 0\vec{j} + (-z - 3)\vec{k},$$

(ii) επίσης για $\Phi(x, y, z) = z - (x^2 + y^2)/2 = 0$

$$\vec{\nabla} \Phi = -x\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}, \quad |\vec{\nabla} \Phi| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad \vec{\eta} = \frac{-x\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

iii) και ότι

$$d\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy$$

Θα έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned}
I &= \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma \\
&= - \int_{D_{xy}} \int \left((z^2 + x)\vec{i} + 0\vec{j} + (-z - 3)\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{-x\vec{i} - y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \right) \\
&\quad \times \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx dy \\
&= \int_{D_{xy}} \int ((z^2 + x)x + (z + 3)) dx dy \\
&= \int_{D_{xy}} \int \left(\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 x + x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + 3 \right) dx dy
\end{aligned}$$

όπου στο παραπάνω ολοκλήρωμα D_{xy} είναι η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο Oxy και η οποία περατώνεται από την κλειστή καμπύλη c' που προκύπτει από την απαλειφή του z από τις εξισώσεις $z = (x^2 + y^2)/2$ και $z = 2$. Αμέσως προκύπτει ότι πρόκειται για περιφέρεια κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2^2$. Κάνουμε μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες και θα έχουμε συνεπώς

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t, \quad dx dy = \rho d\rho dt$$

και το ολοκλήρωμα γράφεται πλέον

$$\begin{aligned}
I &= \int_G \int \left(\frac{\rho^4}{4} \rho \cos t + \rho^2 \cos^2 t + \frac{\rho^2}{2} + 3 \right) \rho d\rho dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \frac{\rho^5}{4} \cos t d\rho dt + \int_{t=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \rho^3 \cos^2 t d\rho dt \\
&\quad + \int_{t=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \frac{\rho^3}{2} d\rho dt + \int_{t=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 3\rho d\rho dt \\
&= 0 + 4\pi + 4\pi + 12\pi = 20\pi
\end{aligned}$$

β) Υπολογισμός του επικαμπύλου ολοκληρώματος

Είναι προφανές ότι η εξίσωση της καμπύλης c είναι $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ η οποία σε παραμετρική μορφή γράφεται

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

και επίσης είναι

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos t, \quad dz = 0$$

Έτσι θα έχουμε τώρα

$$\begin{aligned}
I &= \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^{2\pi} \left(3(2 \sin t)(-2 \sin t) - 2 \cos t 2(2 \cos t) + 2 \sin t 2^2 0 \right) dt \\
&= - \int_{t=0}^{2\pi} (4 \sin^2 t + 8) = - \int_{t=0}^{2\pi} 4 \sin^2 t dt - \int_{t=0}^{2\pi} 8 dt \\
&= -4\pi - 16\pi = -20\pi
\end{aligned}$$

Άσκηση 3. Να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes για τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = \alpha y^2 \vec{i} + \beta z^2 \vec{j} + \gamma x^2 \vec{k}$ και την επιφάνεια S όπου είναι το τμήμα της επιφάνειας του επιπέδου $z = x + 1$ που αποκόπτει ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση:

Λύση: Θα πρέπει να επαληθεύσουμε την σχέση

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

α) Υπολογισμός του επιεπειφάνειου ολοκλρώματος

Η επιφάνεια του επιπέδου που αποκόπτεται από τον κύλινδρο προβάλλεται στο επίπεδο Oxy στην επιφάνεια D_{xy} που είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 = 1$

(i) Έχουμε ότι

$$\text{rot} \vec{F} = -2\beta z \vec{i} - 2\gamma x \vec{j} - 2\alpha y \vec{k},$$

(ii) επίσης για $\Phi(x, y, z) = z - x - 1 = 0$

$$\vec{\nabla} \Phi = -\vec{i} + \vec{k}, \quad |\vec{\nabla} \Phi| = \sqrt{2}, \quad \vec{\eta} = \frac{-\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

iii) και ότι

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

Συνολικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma \\ &= \int \int_{D_{xy}} (-2\beta z \vec{i} - 2\gamma x \vec{j} - 2\alpha y \vec{k}) \left(\frac{-\vec{i} + \vec{k}}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} dx dy \\ &= \int \int_{D_{xy}} (2\beta z - 2\alpha y) dx dy \\ &= \int \int_{D_{xy}} (2\beta(x+1) - 2\alpha y) dx dy \\ &= \int \int_{D_{xy}} 2\beta dx dy + \int \int_{D_{xy}} 2\beta x dx dy - \int \int_{D_{xy}} 2\alpha y dx dy \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \sin t, \quad dx dy = \rho d\rho dt$$

με όρια

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

το παραπάνω ολοκλήρωμα θα γράφεται

$$\begin{aligned} I &= 2\beta \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho \int_{t=0}^{2\pi} dt + 2\beta \int_{\rho=0}^1 \rho^2 d\rho \int_{t=0}^{2\pi} \cos t dt \\ &- 2\alpha \int_{\rho=0}^1 \rho^2 d\rho \int_{t=0}^{2\pi} \sin t dt = 2\beta\pi \end{aligned}$$

β) Υπολογισμός του επικαμπύλου ολοκληρώματος Η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης που περιβάλλει την δοσμένη επιφάνεια είναι προφανώς

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + (\cos t + 1) \vec{k}$$

Το παραπάνω προκύπτει από το ότι η προβολή της καμπύλης στο επιπέδο Oxy είναι περιφέρεια κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2$ και προφανή παραμετροποίηση $x = \cos t, y = \sin t$. Η εξίσωση της παραπάνω καμπύλης όταν μεταφέρεται στην δοσμένη επιφάνεια προκύπτει με την αντικατάσταση $z = x + 1 = \cos t + 1$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι τώρα

$$\begin{aligned} I &= \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \left(\alpha y^2 \frac{dx}{dt} + \beta z^2 \frac{dy}{dt} + \gamma x^2 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \left(\alpha \sin^2 t (-\sin t) + \beta (1 + \cos t)^2 \cos t + \gamma \cos^2 t (-\sin t) \right) dt \\ &= 2\beta \int_{t=0}^{2\pi} \cos^2 t dt = 2\beta\pi \end{aligned}$$

Άσκηση 4. Να υπολογισθεί, με τρεις διαφορετικούς τρόπους, το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I = \int \int_S z \cos \gamma d\sigma$, όπου S είναι η εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $\cos \gamma$ είναι η τρίτη συνιστώσα του κάθετου στην επιφάνεια S μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\eta}$ (γ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\eta}$ με τον άξονα zz')

Λύση: α' τρόπος: Χωρίζουμε την σφαίρα στα δύο ημισφαίρια S_1 και S_2 αντίστοιχα. Καιοι οι δύο επιφάνειας προβάλλονται προφανώς στο επίπεδο xy στον κυκλικό δίσκο D_{xy} : $x^2 + y^2 = 1$. Θα έχουμε επίσης αντίστοιχα για τις δύο επιφάνειες

$$S_1 : \cos \gamma d\sigma = +dxdy, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$S_2 : \cos \gamma d\sigma = -dxdy, \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

όπου στη περίπτωση της επιφάνεια S_1 το πρόσημο (+) οφείλεται στο ότι η γωνία του διανύσματος η σχηματίζει οξεία γωνία με το διάνυσμα \vec{k} ενώ στην επιφάνεια S_2 το πρόσημο (-) οφείλεται στο ότι η γωνία του διανύσματος $\vec{\eta}$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με το διάνυσμα \vec{k} . Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πλέον ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int z \cos \gamma d\sigma = \int_{S_1} \int z \cos \gamma d\sigma + \int_{S_2} \int z \cos \gamma d\sigma \\ &= \int_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy - \int_{D_{xy}} -\sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy \\ &= 2 \int_{D_{xy}} \int \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = 2 \int_G \int \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = 2 \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

β' τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες ακολουθώντας τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$x = \cos \phi \sin \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \theta, \quad d\sigma = 1^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

με όρια

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Επίσης θα έχουμε

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla}\Phi}{|\vec{\nabla}\Phi|} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}), \quad \vec{\eta} \cdot \vec{k} = z$$

Το ολοκλήρωμα πλεόν υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int z \cos \gamma d\sigma = \int_S \int z^2 d\sigma = \int_S \int (\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

γ' τρόπος: Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss εφόσον το επιεπειφάνειο ολοκλήρωμα υπολογίζεται στην κλειστή επιφάνεια της σφαίρας. Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$I = \int_S \int z \cos \gamma d\sigma = \int_S \int z (\vec{\eta} \cdot \vec{k}) d\sigma = \int_S \int (z\vec{k}) \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

Αν στο παραπάνω ολοκλήρωμα θεωρήσουμε ότι $\vec{F} = z\vec{k}$, σύμφωνα με τον τύπο του Gauss θα έχουμε

$$\int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\operatorname{div} \vec{F} = 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \iint_S z\vec{k} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div} (z\vec{k}) dV = \int \int_V \int dV \\ &= \int \int_G \int \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi = \int_{\rho=0}^1 d\rho \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I = \int \int_S z dx dy$, όπου S η εξωτερική επιφάνεια του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0)$$

Λύση: α' τρόπος: Το ολοκλήρωμα, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\cos \gamma d\sigma = dx dy$ γράφεται

$$I = \int_S \int z \cos \gamma d\sigma = \int_S \int z (\vec{\eta} \cdot \vec{k}) d\sigma = \int_S \int (z\vec{k}) \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss και χρησιμοποιώντας, κατάλληλα επιλεγμένες, σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = ar \cos \phi \sin \theta, \quad y = br \sin \phi \sin \theta, \quad z = cr \cos \theta, \quad dV = abcr^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$$

με

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int (z\vec{k}) \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div}(z\vec{k}) dV = \int \int_V \int dV \\ &= \int_{r=0}^1 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} abc r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\ &= abc \int_{r=0}^1 r^2 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} abc \end{aligned}$$

Υπόδειξη: Προσπαθείστε να υπολογίσετε απευθείας το παραπάνω ολοκλήρωμα είτε a) προβάλλωντας $\pi.$ χ. την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο xy είτε β) παραμετροποιώντας την επιφάνεια του ελλειψοειδούς χρησιμοποιώντας κατάλληλα επιλεγμένες σφαιρικές συντεταγμένες.

Άσκηση 6. Να γίνει επαλήθευση του τύπου του Gauss για τη συνάρτηση $\vec{F} = 4x\vec{i} - 2y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ και τη στερεά περιοχή V , που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια $x^2 + y^2 = 4$ και τα επίπεδα $z = 0, z = 3$.

Λύση: Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int \int_V \int \operatorname{div} \vec{A} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

όπου V ο όγκος του στερεού και S η κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον παραπάνω όγκο. Η επιφάνεια αυτή συνίσταται από τρεις διαφορετικές (προς την παραμεμετροποίηση) επιφάνειες, α) την επιφάνεια $z = 0$ (την ονομάζουμε S_1), β) την επιφάνεια $z = 3$ (S_2), και γ) την επιφάνεια $x^2 + y^2 = 4$ (S_3) με τα αντίστοιχα όρια σε κάθε περίπτωση (δες σχήμα...).

α) Θα υπολογίσουμε αρχικά το τριπλό ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση κυλινδρικών συστεταγμένων όπου

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad dV = \rho d\rho d\theta dz$$

με όρια

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 3$$

ενώ επίσης θα έχουμε

$$\operatorname{div} \vec{F} = (4 - 4y + 2z) = (4 - 4\rho \sin \theta + 2z)$$

Το ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται ως εξείς

$$\begin{aligned} I &= \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV = \int \int_V \int (4 - 4\rho \sin \theta + 2z) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \int_{z=0}^3 (4 - 4\rho \sin \theta + 2z) \rho d\rho d\theta dz = 84\pi \end{aligned}$$

β) Θα υπολογίσουμε τώρα το επιεπιφάνειο ολοκλήρωμα στην επιφάνεια που περικλείει τον όγκο V , υπολογίζοντας τρία επιεπιφάνεια ολοκληρώματα αντίστοιχα στις επιφάνειες S_1, S_2

και S_3 .

β1) Για το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S_1 θα έχουμε

$$d\sigma = dx dy, \quad \vec{\eta} = -\vec{k}$$

και συνεπώς

$$I_1 = \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{D_1} \int (-z^2) dx dy = 0$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι στην επιφάνεια S_1 έχουμε σταθερά $z = 0$.

β2) Για το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S_2 θα έχουμε

$$d\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2} dx dz = dx dy, \quad \vec{\eta} = \vec{k}$$

και συνεπώς

$$I_2 = \int_{S_2} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{D_2} \int (z^2) dx dy = 9 \int dx dy = 9\pi 2^2 = 36\pi$$

β3) Για το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S_3 θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες όπου

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta, \quad z = z, \quad d\sigma = 2d\theta dz$$

με όρια

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 3$$

και επίσης

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{2}(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{S_3} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{S_3} \int (2x^2 - y^3) d\sigma \\ &= \int_{D_3} \int 8(\cos^2 \theta - \sin^3 \theta) 2d\theta dz \\ &= 16 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 (\cos^2 \theta - \sin^3 \theta) d\theta dz = 48\pi \end{aligned}$$

Συνολικά θα έχουμε

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$$

Άσκηση 7. Να επαληθευτεί ο τύπος του Stokes για το ολοκλήρωμα

$$\oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$

όπου C είναι η περίμετρος του τριγώνου ABC με κορυφές $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$.

Λύση: α) Αρχικά θα υπολογίσουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της διαδρομής $A \rightarrow B \rightarrow C$. Η παραμετροποίηση των τριών παραπάνω διαδρομών είναι αντίστοιχα:

$$A \rightarrow B : \quad x + y = a, \quad x = t, \quad y = a - t, \quad a \leq t \leq 0$$

$$B \rightarrow C : \quad y + z = a, \quad y = t, \quad z = a - t, \quad a \leq t \leq 0$$

$$C \rightarrow A : \quad x + z = a, \quad x = t, \quad z = a - t, \quad 0 \leq t \leq a$$

και το κλειστό ολοκλήρωμα θα είναι

$$\begin{aligned} I &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint (z-x)dx + (x-z)dy + (y-x)dz \\ &= \int_{A \rightarrow B} () + \int_{B \rightarrow C} () + \int_{C \rightarrow A} () \\ &= \int_{t=a}^0 [(0 - (a-t)) \cdot 1 + (t-0) \cdot (-1) + (a-t-t) \cdot 0] dt \\ &= \int_{t=a}^0 [(a-t-t) \cdot 0 + (0 - (a-t)) \cdot 1 + (t-0) \cdot (-1)] dt \\ &= \int_{t=0}^a [(a-t-0) \cdot 1 + (t-(a-t)) \cdot 0 + (0-t) \cdot (-1)] dt \\ &= \int_{t=a}^0 (-a)dt + \int_{t=a}^0 (-a)dt + \int_{t=0}^a adt = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

β) Θα υπολογίσουμε τώρα το αντίστοιχο επιεπειφάνιο ολοκλήρωμα $\int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$. Θα έχουμε

$$\text{rot} \vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

και επίσης, επειδή προφανώς η εξίσωση του επιπέδου είναι $x + y + z = a$ θα έχουμε

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Η προβολή της επιφάνειας S στο επίπεδο Oxy είναι η τριγωνική επιφάνεια που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 0$, $x = 0$ και $x + y = a$ και επίσης είναι

$$d\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy.$$

Το επιεπειφάνιο ολοκλήρωμα γράφεται πλέον

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_D \int (2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \sqrt{3} dx dy \\ &= \int_{x=0}^a \left(\int_{y=0}^{a-x} 6 dy \right) dx = 6 \int_{x=0}^a (a-x) dx = 6 \frac{a^2}{2} = 3a^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 8. Να επαληθευτεί το θεώρημα του Stokes για το τμήμα της x -ωνικής επιφάνειας $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z = 2$ και $z = 1$ όταν $\vec{F} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον τύπο του είναι Stokes

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

a) *Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* : Η καμπύλη C πάνω στην οποία θα υπολογίσουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βρίσκεται στο επίπεδο $z = 1$ και είναι περιφέρεια κύκλου με ακτίνα που θα είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z = 1$. Συνεπώς η παραμετροποίηση της πειφέρειας θα είναι

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad z = 1, 0 \leq \theta \leq 1$$

και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} [(\sin \theta - 1) \cdot (-\sin \theta) + (1 - \cos \theta) \cdot (\cos \theta) \\ &\quad + (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (0)] d\theta = -2\pi \end{aligned}$$

β) *Επιεπειφάνειο ολοκλήρωμα* : Η κωνική επιφάνεια S πάνω στην οποία θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα προβάλεται στο επίπεδο xy στο κυκλικό δίσκο $x^2 + y^2 = 1$ (προκύπτει από την απαλειφή του z ανάμεσα στην εξίσωση του κώνου $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ και στην εξίσωση του επιπέδου $z = 1$). Θα έχουμε επίσης

$$\text{rot} \vec{F} = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} + \vec{k} \right)$$

και επίσης

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

Το ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma \\ &= \int_D \int (-2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j} + \vec{k} \right) \right] \sqrt{2} dx dy \\ &= \int_D \int -2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) dx dy \\ &= \int_G \int -2(\cos \theta + \sin \theta + 1) \rho d\rho d\theta \\ &= -2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \cos \theta \rho d\rho d\theta - 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \sin \theta \rho d\rho d\theta \\ &\quad - 2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho d\theta = 0 + 0 - 2\pi = -2\pi \end{aligned}$$

όπου στο παραπάνω ολοκλήρωμα κάναμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες.

Άσκηση 9. Να γίνει επαλήθευση του τύπου του Gauss για τη συνάρτηση $\vec{F} = (2x - z)\vec{i} + x^2y\vec{j} - xz^2\vec{k}$ και για την επιφάνεια του κύβου που ορίζεται από τα επίπεδα $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Λύση: α' Υπολογισμός του επιεπειφάνιου ολοκληρώματος Ο κύβος φαίνεται στο σχήμα.... ο υπολογισμός του επιεπειφάνιου ολοκληρώματος

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma$$

συνίσταται στο υπολογισμό 6 επιπειφάνειων ολοκλήρωματων μία για κάθε επιφάνεια του κύβου. Πρέπει σε κάθε περίπτωση να καθοριστεί το κάθερο διάνυσμα $\vec{\eta}$, η στοιχειώσης επιφάνεια $d\sigma$ και τα ορια της προβολής της κάθε επιφάνειας στα επίπεδα xy, xz , και yz . Έτσι θα έχουμε σε κάθε περίπτωση:

$$ABCD : \quad \vec{\eta} = -\vec{k}, \quad d\sigma = dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

$$HEFG : \quad \vec{\eta} = \vec{k}, \quad d\sigma = dx dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 1$$

$$ADGH : \quad \vec{\eta} = -\vec{j}, \quad d\sigma = dx dz, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad y = 0$$

$$BCFE : \quad \vec{\eta} = \vec{j}, \quad d\sigma = dx dz, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad y = 1$$

$$ABEH : \quad \vec{\eta} = \vec{i}, \quad d\sigma = dy dz, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x = 1$$

$$DCFG : \quad \vec{\eta} = -\vec{i}, \quad d\sigma = dy dz, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad x = 0$$

Τα αντίστοιχα ολοκληρώματα είναι

$$I_1 = \int_{D_{ABCD}} \int (xz^2) dx dy = 0$$

$$I_2 = \int_{D_{HEFG}} \int (-xz^2) dx dy = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (-x) dx dy = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_{D_{ADGH}} \int (-x^2 y) dx dz = 0$$

$$I_4 = \int_{D_{BCFE}} \int (x^2 y) dx dz = \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 x^2 dx dy = \frac{1}{3}$$

$$I_5 = \int_{D_{ABEH}} \int (2x - z) dy dz = \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (2 - z) dy dz = \frac{3}{2}$$

$$I_6 = \int_{D_{DCFG}} \int -(2x - z) dy dz = \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 z dy dz = \frac{1}{2}$$

Συνολικά θα έχουμε

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

β' Εφαρμογή τύπου Gauss: Από τον τύπο του Gauss οπου

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2 + x^2 - 2xz$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV = \int \int_V \int (2 + x^2 - xz) dx dy dz \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (2 + x^2 - 2xz) dx dy dz = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Άσκηση 10. Δίνεται η επιφάνεια S $2z = 4 - x^2 - y^2$. Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ των υψών $z = 1$ και $z = \sqrt{2}$.

Λύση: α' τρόπος: Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 = 4 - 2z$$

με όρια αντίστοιχα

$$1 \leq z \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Η παραμετρική παράσταση της της επιφάνειας του παραβολοειδούς θα είναι

$$\vec{r}(\theta, z) = \sqrt{4z - 2} \cos \theta \vec{i} + \sqrt{4z - 2} \sin \theta \vec{j} + z \vec{k}$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\sqrt{4z - 2} \sin \theta \vec{i} + \sqrt{4z - 2} \cos \theta \vec{j} \\ \vec{\epsilon}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = -\frac{1}{\sqrt{4z - 2}} \cos \theta \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{4z - 2}} \sin \theta \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 &= 4 - 2z, \quad \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = \frac{5 - 2z}{4 - 2z}, \quad \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0 \end{aligned}$$

Η στοιχειώση επιφάνεια $d\sigma$ θα είναι συνεπώς

$$d\sigma = \sqrt{g} d\theta dz = \sqrt{(\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1) \cdot (\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2) - (\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2)^2} = \sqrt{5 - 2z} d\theta dz$$

Η συνολική επιφάνεια θα είναι

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_S \int d\sigma = \int_S \int \sqrt{5 - 2z} d\theta dz \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=1}^{\sqrt{2}} \sqrt{5 - 2z} dz \\ &= 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}(5 - 2\sqrt{2})^{3/2} \right) \end{aligned}$$

β' τρόπος: Μπορούμε να υπολογίσουμε την ζητούμενη επιφάνεια προβάλλοντας την στο επίπεδο xy . Η προβολή της θα είναι κυκλικός δακτύλιος με ακτίνες που προκύπτουν από την απαλειφή του z από τις εξισώσεις των επιφανειών $z = 1$ και $z = \sqrt{2}$ και της επιφάνειας του παραβολοειδούς $2z = 4 - x^2 - y^2$. Έτσι οι ακτίνες των δύο κυκλικών δίσκων θα είναι αντίστοιχα $\rho_1 = \sqrt{2}$ και $\rho_2 = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Επιπλέον θα έχουμε

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

και χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες με όρια αντίστοιχα

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

με όρια

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \leq \rho \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

θα έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_S \int d\sigma = \int_{D_{xy}} \int \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_G \int \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=\sqrt{4-2\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}(5 - 2\sqrt{2})^{3/2} \right) \end{aligned}$$

γ' τρόπος: Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss όπου

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Στην παραπάνω σχέση V ειναι ο όγκος που περικλέιεται από την το τμήμα της επιφάνειας του παραβολοειδούς που θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν (S_1) και από τους κυκλικούς δίσκους των επιφανειών $z = 1$ (επιφάνεια S_2) και $z = \sqrt{2}$ (S_3). Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma &= \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV \Rightarrow \\ \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma &= \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV - \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma - \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma \end{aligned}$$

Στην επιφάνεια S_1 το κάθετο διάνυσμα είναι

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} (x \vec{i} + y \vec{j} + \vec{k})$$

και επιλέγοντας για παράδειγμα την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{F} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \vec{k}$$

τότε θα έχουμε

$$\int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int_{S_1} \int d\sigma$$

Λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι οι επιφάνειας S_2 και S_3 προβάλλονται στο επίπεδο xy σε αντίστοιχους κυκλικούς δίσκους με ακτίνες $\rho = \sqrt{2}$ και $\rho = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ αντίστοιχα (δες α' και β' τρόπους της άσκησης) και ότι

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$

θα έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_{S_1} \int d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV - \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma - \int_{S_1} \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma \\ &= 0 - \int_{D_1} \int \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dx dy - \int_{D_2} \int \vec{F} \cdot \vec{k} dx dy \\ &= \int_{D_1} \int \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy - \int_{D_2} \int \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho - \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}(5 - 2\sqrt{2})^{3/2} \right)\end{aligned}$$

Της πρόσπαθης: Προσπαθήστε να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας εφαρμόζοντας κατάλληλα τον τύπο του Stokes. Δείτε και τη σχετική θεωρία του Κεφαλαίου

Άσκηση 11. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_S \int x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$$

όπου S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

- α) Ως επιεπιφάνιο ολοκλήρωμα β' τύπου
- α) με τη βοήθεια του θεωρήματος της αποκλίσεως

Λύση: α' τρόπος: Το κάθετο διάνυσμα πάνω στην σφαίρική επιφάνεια είναι

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{\nabla} \Phi}{|\vec{\nabla} \Phi|} = \frac{1}{a} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$$

και επίσης είναι

$$\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

Εαν παραμετροποιήσουμε την επιφάνεια της σφαίρας χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$x = a \cos \phi \sin \theta, \quad y = a \sin \phi \sin \theta, \quad z = a \cos \theta, \quad d\sigma = a^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

με όρια

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Το ολοκλήρωμα τώρα γράφεται

$$\begin{aligned}
 I &= \int_S \int x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy = \int_S \int \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma \\
 &= a \int_S \int (x^3 + y^3 + z^3) d\sigma \\
 &= a^4 \int_S \int ((\cos \phi \sin \theta)^3 + (\sin \phi \sin \theta)^3 + (\cos \theta)^3) \sin \theta d\phi d\theta \\
 &= a^4 \left(\int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^3 \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta + \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^3 \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^4 \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \right) = 0 + 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

β' τρόπος: Από τον τύπο του Gauss θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} d\sigma = \int \int_V \int \operatorname{div} \vec{F} dV = \int \int_V \int (2x + 2y + 2z) dx dy dz \\
 &= 2 \int \int_V \int (r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \sin \theta + r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= 2 \left(\int_{r=0}^a r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \right. \\
 &\quad + \int_{r=0}^a r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \phi d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \\
 &\quad \left. + \int_{r=0}^a r^3 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) = 0 + 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

Άσκηση 12. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c yz dx + xz dy + xy dz$$

όπου c είναι η κλειστή καμπύλη $x^2 + y^2, z = y^2$

- α) κατευθείαν σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' τύπου
- β) χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stokes

Λύση: α' τρόπος : Η προβολής της τομής της επιφάνειας $z = y^2$ με την κυλνδρική επιφάνεια στο επίπεδο $x^2 + y^2 = 1$ είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας $\rho = 1$. Η καμπύλη c πάνω στην οποία υπολογίζεται το ολοκλήρωμα παραμετροποιείται ως εξής

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin^2 t \vec{k}$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
I &= \oint_c yzdx + xzdy + xydz \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} \left(y(t)z(t) \frac{dx}{dt} + x(t)z(t) \frac{dy}{dt} + x(t)y(t) \frac{dz}{dt} \right) dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} \left(\sin t \sin^2 t (-\sin t) + \cos t \sin^2 t (-\cos t) \right. \\
&\quad \left. + \cos t (2 \sin t \cos t) \right) dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} (3 \cos^2 t \sin^2 t - \sin^4 t) dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} (3 \cos^2 t \sin^2 t - \sin^2 t (1 - \cos^2)) dt \\
&= \int_{t=0}^{2\pi} \sin^2 2tdt - \int_{t=0}^{2\pi} \sin^2 t dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{4\pi} \sin^2 x dx - \int_{x=0}^{2\pi} \sin^2 x dx = 0
\end{aligned}$$

β' τρόπος : Σύμφωνα τον τύπο του Stokes έχουμε

$$I = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

όπου S η επιφάνεια που είναι τμήμα της επιφάνειας $z = y^2$ που περιβάλλεται από την κλειστή καμπύλη c και όπου

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

Θα έχουμε όμως

$$\text{rot} \vec{F} = (x - x)\vec{i} + (y - y)d\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$I = \int_S \int \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

Άσκηση 13. Να υπολογιστεί, με δύο τρόπους, το εμβαδόν του τμήματος που αποκόπτει από το άνω ημισφαίριο ($z \geq 0$) της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ο κύλινδρος $x^2 + y^2 - y = 0$.

Λύση: a' τρόπος] Το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι τμήμα σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και η προβολή του D στο επίπεδο xy είναι η βάση του κυλίνδρου $x^2 + y^2 - y = 0$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

το εμβαδόν θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int_S \int d\sigma = \int_D \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dxdy = \rho d\rho d\theta$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι λόγω συμμετρίας η επιφάνεια προβάλλεται ισόποσα στα δύο τμήματα του κυκλικού δίσκου τα όρια για τις μεταβλητές ρ και θ είναι

$$x^2 + y^2 - y = 0 \rightarrow 0 \leq \rho \leq \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int_D \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\int_{\rho=0}^{\sin \theta} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho \right] d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta}) = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - |\cos \theta|) d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos \theta) d\theta = \pi - 2 \end{aligned}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta|$

[Τπόδειξη]: Αν στο παραπάνω ολοκλήρωμα παίρναμε σαν όρια για την γωνία θ , $0 \leq \theta \leq \pi$ το ολοκλήρωμα θα γινόταν (μετά την ολοκλήρωση ως προς την μεταβλητή ρ)

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{\pi} (1 - |\cos \theta|) d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 - \cos \theta) d\theta + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2}(\pi - 2) + \frac{1}{2}(\pi - 2) = \pi - 2 \end{aligned}$$

[Έπειρης]: Θα εφαρμόσουμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = \cos \phi \sin \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \theta \quad d\sigma = \sin \theta d\phi d\theta$$

Τα σημεία τομής της σφαίρας με τον κύλινδρο βρίσκονται απαλείφοντας την ποσότητα $x^2 + y^2$ και χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, θα έχουμε δηλαδή (για την περιοχή που μας ενδιαφέρει)

$$y + z^2 = 1 \rightarrow \sin \phi \sin \theta = 1 - \cos^2 \theta \rightarrow \sin \phi = \sin \theta \rightarrow \phi = \theta$$

Το εμβαδόν του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας θα είναι συνεπώς

$$\begin{aligned} I &= \int_S \int d\sigma = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\phi=\theta}^{\pi/2} \sin \theta d\phi \right) d\theta = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta d\theta \\ &= \pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta - 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \theta \sin \theta d\theta = \pi - 2 \end{aligned}$$

0.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Άσκηση 1. Να υπολογιστεί η μάζα των σφαιρικού φλοιού ακτίνων a , b , $a < b$ και πυκνότητας $\rho = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $x, y, z > 0$.

Λύση: Η μάζα του σώματος δίνεται από την σχέση

$$m = \int \int \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Επειδή το σώμα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τη μάζα έχει σφαιρικό σχήμα θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \theta, \quad z = r \cos \phi, \quad dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

με όρια, εφόσον περιοριζόμαστε στο μπρώτο ογδοημέριο,

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/4$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται τώρα

$$\begin{aligned} m &= \int \int \int_V \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz = \int_{r=a}^b r^4 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{\pi/4} d\phi \\ &= \frac{1}{5}(a^5 - b^5) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{(a^5 - b^5)\pi}{20} \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας του ομογενούς κυλινδρού $x^2 + y^2 = a^2$, με ύψος b , ως προς τον άξονα των z

Λύση: Η ροπή αδρανείας, ως προς τον άξονα των z , δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα

$$I_z = \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

Ο κυλινδρος είναι ομογενής, συνεπώς η πυκνότητα του είναι σταθερή $\rho = c$. Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz$$

με όρια

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq b$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται τώρα

$$\begin{aligned} I_z &= \int \int \int_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = c \int_{\rho=0}^a \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^b dz \\ &= c \cdot \frac{a^4}{4} \cdot (2\pi) \cdot b = \frac{ca^4 \pi b}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί η μάζα του κωνικού κελύφους $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ επιφανειακής πυκνότητας $\rho = x^2 + y^2$, που περικλείεται μεταξύ των επιπέδων

$z = 0$ και $z = 3$.

Λύση: Η μάζα του σώματος είναι συγκεντρωμένη στην επιφάνεια του κώνου και συνεπώς θα υπολογίζεται από το επιεπειφάνειο ολοκλήρωμα της μορφής

$$m = \int \int_S \rho(x, y, z) d\sigma = \int \int_S (x^2 + y^2) d\sigma$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες και αφού λαβούμε υπόψη ότι $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} = \sqrt{3}\rho$ και συνεπώς η γωνία a του κώνου θα είναι $\tan a = \rho/z = \sqrt{3}/3 \Rightarrow a = \pi/6$ θα έχουμε την παραμετροποίηση

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = \sqrt{3}\rho, \quad d\sigma = \frac{\rho}{\sin a} = 2\rho$$

με όρια

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται τώρα

$$m = \int \int_S (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot 2\pi = 9\pi$$

Υπόξειξη: Ενναλακτικά η παραπάνω άσκηση μπορεί να λυθεί θεωρώντας ότι προβάλουμε την κωνική επιφάνεια στο επίπεδο Oxy . Η προβολή που προκύπτει είναι προφανώς ένας κυκλικός δίσκος D_{xy} ακτίνας $\sqrt{3}$. Επίσης θα έχουμε ότι

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 dx dy$$

και το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\begin{aligned} m &= \int \int_S (x^2 + y^2) d\sigma = \int \int_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \int \int_{D_{xy}} 2(x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας σύστημα πολικών συντεταγμένων δηλαδή

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad dx dy = \rho d\rho d\phi$$

με όρια

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$$

καταλήγουμε πάλι στο γνωστό ολοκλήρωμα

$$m = 2 \int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 9\pi$$

Άσκηση 4. Δίνεται η συρμάτινη έλικα $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \beta t$ ($a > 0, \beta = /0$) με πυκνότητα μάζας $\lambda = \gamma z$. Να βρεθούν για $t \in (0, 2\pi)$

- α) Το σημείο του κέντρου μάζας της έλικας
- β) Το μήκος της έλικας

Λύση: Για προφανείς λόγους συμμετρίας το κέντρο μάζας θα βρίσκεται στον άξονα z και θα είναι

$$z_G = \frac{1}{m} \int_c z \lambda ds, \quad m = \int_c \lambda ds$$

Η μάζα καταρχήν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} m &= \int_c \lambda ds = \int_{t=0}^{2\pi} \gamma z \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \gamma \beta \sqrt{a^2 + \beta^2} \int_{t=0}^{2\pi} t dt = 2\pi^2 \gamma \beta \sqrt{a^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Με το ίδιο τρόπο θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_c z \lambda ds = \int_{t=0}^{2\pi} z \gamma z \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \gamma \beta^2 \sqrt{a^2 + \beta^2} \int_{t=0}^{2\pi} t^2 dt = \frac{8}{3} \gamma \beta^2 \pi^3 \sqrt{a^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

Το κέντρο μάζας θα είναι συνεπώς

$$z_G = \frac{1}{m} I = \frac{4}{3} \beta \pi$$

Άσκηση 5. Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας ομογενούς σφαιρικού κελύφους ως προς τον άξονα z αν η ακτίνα του είναι a και η πυκνότητα του λ

Λύση:

Η ροπή αδράνειας του σφαιρικού κελύφους ως προς τον άξονα z δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I_z = \int \int_S (x^2 + y^2) \lambda d\sigma$$

όπου S η επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους. Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = a \cos \phi \sin \theta, \quad y = a \sin \phi \sin \theta, \quad z = a \cos \theta$$

Το στοιχειώδες εμβαδόν $d\sigma$ σε σφαιρική επιφάνεια είναι $d\sigma = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$

Θα έχουμε συνεπώς

$$\begin{aligned} I_z &= \int \int_S (x^2 + y^2) \lambda d\sigma = \int \int_G (a \sin \theta)^2 \lambda a^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \lambda a^4 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \lambda a^4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8}{3} \pi \lambda a^4 \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μάζα του κελύφους θα είναι

$$m = \int \int_S \lambda d\sigma = \lambda a^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 4\pi a^2 \lambda$$

η ροπή αδράνειας I_z θα δίνεται από την σχέση

$$I_z = \frac{2}{3} m a^2$$

Άσκηση 6. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ομογενούς ορθού κυκλικού κώνου ως προς τον άξονα y αν η πυκνότητα του είναι λ , η ακτίνα της βάσης του είναι a και το ύψος του h

Λύση:

Η ροπή αδράνειας του κώνου ως προς τον άξονα y θα δίνεται από τη σχέση

$$I_y = \int \int \int_V (x^2 + z^2) \lambda dx dy dz$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες όπου είναι

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$$

Επιπλέον από τα όμοια τρίγωνα OAB και $OO'C$ θα έχουμε

$$\frac{\rho}{a} = \frac{z}{h} \Rightarrow \frac{h}{a} \rho$$

Έτσι συνολικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_y &= \int \int \int_V (x^2 + z^2) \lambda dx dy dz = \lambda \int \int \int_G (\rho^2 \cos^2 \theta + z^2) \rho d\rho d\theta dz \\ &= \lambda \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \left(\int_{z=\frac{h}{a}\rho}^h (\rho^2 \cos^2 \theta + z^2) \rho dz \right) d\rho d\theta \\ &= \lambda \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^a \rho \left(\rho^2 \cos^2 \theta (h - \frac{h}{a}\rho) + \frac{1}{3}(h^3 - (\frac{h}{a}\rho)^3) \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \lambda \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{a^2 h^3}{10} + \frac{1}{20} a^4 h \cos^2 \theta \right) d\theta = \frac{\lambda a^2 h \pi}{20} (a^2 + 4h^2) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μάζα του παραπάνω κώνου δίνεται από την σχέση $m = 1/3\pi a^2 h \lambda$ (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση) τότε θα έχουμε

$$I_y = \frac{3}{20} m (a^2 + 4h^2)$$

Άσκηση 7. Διδεται η πυραμίδα $x + y + z \leq 1$, $x, y, z \geq 0$, πυκνότητας $\rho = x$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας της.

Λύση:

Τυπολογίζουμε αρχικά τη μάζα της πυραμίδας η οποία είναι ένα ολοκλήρωμα όγκου μιας πυραμίδας όπου ως προς τον άξονα των z περιβάλλεται από τις επιφάνειες $z = 0$ και $z = 1 - x - y$ και η προβολή της οποίας στον επίπεδο Oxy είναι η τριγωνική επιφάνεια D_{xy} η οποία περιορίζεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$ και $x + y = 1$. Η μάζα της πυραμίδας θα δίνεται συνεπώς από την σχέση

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \rho dV = \iint_V \int_V x dx dy dz = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} x dz \right) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dx dy = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} x(1-x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 x \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Η συνιστώσα του κέντρου μάζας στον άξονα των x θα είναι

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iiint_V x \rho dV = \frac{1}{m} \iint_V \int_V x^2 dx dy dz \\ &= \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} x^2 dz \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} x^2(1-x-y) dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} x^2(1-x-y) dy \right) dx = \int_{x=0}^1 x^2 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Η συνιστώσα του κέντρου μάζας στον άξονα των y θα είναι

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{m} \iiint_V y \rho dV = \frac{1}{m} \iint_V \int_V y x dx dy dz \\ &= \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} y x dz \right) dx dy = \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} y x (1-x-y) dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} y x (1-x-y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{x=0}^1 x \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) dx = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Η συνιστώσα του κέντρου μάζας στον άξονα των z θα είναι

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{m} \iiint_V z \rho dV = \frac{1}{m} \iint_V \int_V z x dx dy dz \\ &= \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} z x dz \right) dx dy \\ &= \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} x \frac{1}{2} (1-x-y)^2 dx dy \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} x \frac{1}{2} (1-x-y)^2 dy \right) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{x=0}^1 \frac{1}{2} x \left(-\frac{1}{3} \right) (x-1)^3 dx = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Συνεπώς το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες $G(\frac{6}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

Άσκηση 8. Να βρεθεί το κέντρο μάζας τμήματος ομογενούς σφαιρικας ακτίνας a που αποκόπτεται από κώνο γωνίας ω με κορυφή το κέντρο της σφαιρικας.

Λύση:

Λόγω συμμετρίας το κέντρο μάζας θα βρίσκεται πάνω στον άξονα των z και θα είναι

$$z_G = \frac{1}{m} \int \int \int_V \lambda z dx dy dz$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά την μάζα του τμήματος χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες όπου

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad dxdydz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

με όρια

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \omega, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

Έτσι θα είναι

$$\begin{aligned} m &= \int \int \int_V \lambda dx dy dz = \lambda \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \cdot \int_{r=0}^a r^2 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\omega} \sin \theta d\theta \\ &= \lambda \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} a^3 \cdot (1 - \cos \omega) = \frac{2\pi \lambda a^3}{3} (1 - \cos \omega) \end{aligned}$$

Για το κέντρο μάζας θα έχουμε

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{m} \int \int \int_V \lambda z dx dy dz = \lambda \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \cdot \int_{r=0}^a r^3 dr \cdot \int_{\theta=0}^{\omega} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{m} \lambda \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot \frac{\sin^2 \omega}{2} = \frac{3a}{8} \frac{\sin^2 \omega}{1 - \cos \omega} \end{aligned}$$

Άσκηση 9. Να βρεθούν η μάζα και η ροπή αδρανείας ομογενούς ελλειψοειδούς με εξίσωση

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

ως προς την αρχή των αξόνων

Λύση: Για να υπολογίσουμε την μάζα και την ροπή αδρανείας στο παραπάνω ελλειψοειδές μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταμένες που θα είναι

$$x = 2r \cos \phi \sin \theta, \quad y = 3r \sin \phi \sin \theta, \quad z = 4r \cos \theta, \quad dV = 24r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

με όρια

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Η μάζα του ελλειψοειδούς δίνεται από το παρακάτω τριπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \delta \, dx \, dy \, dz = 24\delta \iint_G r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= 24\delta \int_{r=0}^1 r^2 \, dr \int_{\phi=0}^{2\pi} \, d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \, d\theta = 24\delta \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = 32\delta\pi \end{aligned}$$

Η ροπή αδράνειας δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \delta(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= 24\delta \iint_G (4r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 9r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \\ &\quad + 16r^2 \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= 24\delta \int_{r=0}^1 r^4 \, dr \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} (4 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 9 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right. \\ &\quad \left. + 16 \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) \\ &= 24\delta \frac{1}{5} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 4 \sin^3 \theta \cos^2 \phi \, d\theta \, d\phi + \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 9 \sin^3 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} 16 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) \\ &= 24\delta \frac{1}{5} \left(\frac{16\pi}{3} + 12\pi + \frac{64\pi}{3} \right) = \frac{928\delta\pi}{5} \end{aligned}$$

Άσκηση 10. Λεπτός δίσκος ομογενής σταθερού πάχους k πυκνότητας δ καλύπτει την περιοχή του επιπέδου Oxy που ορίζεται από τις σχέσεις $y = x^2$, $x = y^2$. Να βρεθούν το κέντρο μάζας και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Θα υπολογίσουμε αρχικά την μάζα του δίσκου όπου είναι

$$\begin{aligned} m &= \iint_{D_{xy}} \delta \, dx \, dy = \delta \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \, dy \right) \, dx = \delta \int_{x=0}^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx \\ &= \delta \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\delta}{3} \end{aligned}$$

α) Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας x_G και y_G υπολογίζονται από τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{m} \iint_{D_{xy}} x \delta \, dx \, dy = \frac{\delta}{m} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} x \, dy \right) \, dx \\ &= \frac{\delta}{m} \int_{x=0}^1 x (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \frac{\delta}{m} \frac{3}{20} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{m} \int \int_{D_{xy}} y \delta dx dy = \frac{\delta}{m} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right) dx \\
&= \frac{\delta}{m} \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (x - x^4) dx = \frac{\delta}{2m} \frac{3}{10} = \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

Συνεπώς το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες $G(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$

β) Η ροπή αδράνειας, ως προς το σημείο $O(0, 0)$ θα είναι

$$\begin{aligned}
I &= \int \int_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \delta dx dy = \delta \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy \right) dx \\
&= \delta \int_{x=0}^1 \left(\frac{x^{3/2}}{3} + x^{5/2} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{6\delta}{35}
\end{aligned}$$

Άσκηση 11. Να βρεθεί η z συνιστώσα του κέντρου μάζας του ομογενούς στερεού που περιλαμβάνεται μεταξύ των επιφανειών $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 8 - x^2 - y^2$

Λύση:

Η προβολή του κοινού όγκου των δύο επιφανειών στο επίπεδο Oxy προκύπτει απαλειφοντας την μεταβλητή z και αυτό που προκύπτει είναι μια έλλειψη D_{xy} με εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 4$. Υπολογίζουμε αρχικά την μάζα του κοινού όγκου που προκύπτει από το παρακάτω τριπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
m &= \int \int \int_V \lambda dx dy dz = \lambda \int \int_{D_{xy}} \left(\int_{z=x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right) dx dy \\
&= \lambda \int \int_{D_{xy}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες τις οποίες ορίζουμε ως εξεις

$$x = \sqrt{2}\rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad dx dy = \sqrt{2}\rho d\rho d\theta$$

και με όρια

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται πλεόν

$$\begin{aligned}
m &= \lambda \int \int_{D_{xy}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy = \lambda \int \int_G 4(2 - \rho^2) \sqrt{2}\rho d\rho d\theta \\
&= 4\sqrt{2}\lambda \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \rho d\rho = 4\sqrt{2}\lambda \cdot 2\pi \cdot 1 = 8\pi\sqrt{2}\lambda
\end{aligned}$$

Η z συνιστώσα του κέντρου μάζας υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{m} \int \int \int_V z \lambda dx dy dz = \frac{\lambda}{m} \int \int_{D_{xy}} \left(\int_{z=x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} z dz \right) dx dy \\
&= \frac{\lambda}{2m} \int \int_{D_{xy}} 4(4+y^2)(4-x^2-2y^2) dx dy \\
&= \frac{\lambda}{2m} \int \int_G 4(4+\rho^2 \sin^2 \theta)(4-2\rho^2) \sqrt{2} \rho d\rho d\theta \\
&= \frac{4\lambda\sqrt{2}}{m} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} (4+\rho^2 \sin^2 \theta)(2-\rho^2) d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{4\lambda\sqrt{2}}{m} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{8\sqrt{2}}{15} (10 + \sin^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{4\lambda\sqrt{2}}{m} \frac{8\sqrt{2}}{15} 21\pi = \frac{448\pi\lambda}{5m} = \frac{28\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

Άσκηση 12. Θεωρείστε το ομογενές στερεό που ορίζεται από τις επιφάνειες $x+y=2$, $2y+x=4$, $z^2+y^2=4$, $x,y,z \geq 0$. Να βρεθεί η z συνιστώσα του κέντρου μάζας

Λύση: Η προβολή του κοινού όγκου στο επίπεδο Oxy είναι η επιφάνεια D_{xy} η οποία ορίζεται από τις καμπύλες $x+y=2$, $2y+x=4$ και $y=0$. Υπολογίζουμε αρχικά την μάζα του σώματος η οποία δίνεται από το παρακάτω τριπλό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
m &= \int \int \int_V \lambda dx dy dz = \lambda \int \int_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} dz \right) dx dy \\
&= \lambda \int \int_{D_{xy}} (4-y^2)^{1/2} dx dy = \lambda \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=2-y}^{4-2y} (4-y^2)^{1/2} dx \right) dy \\
&= \lambda \int_{y=0}^2 (2-y)(4-y^2)^{1/2} dy = \lambda \left(2\pi - \frac{8}{3} \right)
\end{aligned}$$

Η z συνιστώσα του κέντρου μάζας υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{m} \int \int \int_V z \lambda dx dy dz = \frac{\lambda}{m} \int \int_{D_{xy}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} z dz \right) dx dy \\
&= \frac{\lambda}{m} \int \int_{D_{xy}} \frac{1}{2}(4-y^2) dx dy = \frac{\lambda}{2m} \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=2-y}^{4-2y} (4-y^2) dx \right) dy \\
&= \frac{\lambda}{2m} \int_{y=0}^2 (4-y^2)(2-y) dy = \frac{\lambda}{2m} \cdot \frac{20}{3} = \frac{10\lambda}{3m} = \frac{10}{3(2\pi - \frac{8}{3})}
\end{aligned}$$