

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
&

Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ

Λυμένα Θέματα Εξετάσεων

Επιμέλεια: Ν. Κ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$$

ΛΥΣΗ

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+6}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι '

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστεί το παρακάτω αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} dx$$

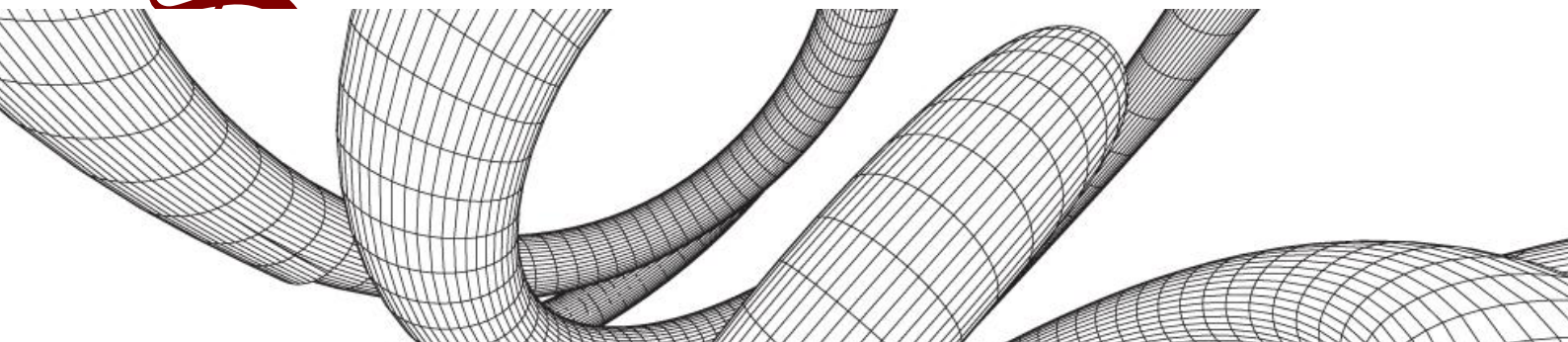
ΛΥΣΗ

Αναλύουμε το αρχικό κλάσμα $\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)}$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

Έχουμε ότι:

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{a(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{bx(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{cx^2}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow$$



$$\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x^2}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 3x + 2 = \alpha(x+1) + \beta x(x+1) + \gamma x^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 3x + 2 = \alpha x + \alpha + \beta x^2 + \beta x + \gamma x^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 3x + 2 = (\beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\beta + \gamma = 4, \alpha + \beta = 3, \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3$$

Άρα τελικά είναι: $\frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x+1}$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\int \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^2(x+1)} dx = \int \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x+1} dx = -\frac{2}{x} + \ln|x| + 3\ln|x+1| + c$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 3

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει να λυθεί.

$$2x + 5y + 4z = 3$$

$$4x - 3y - 4z = 0$$

$$2x + 6y - 8z = 1$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(24+24) - 3(-32+8) + 4(24+6) = 2 \cdot 48 - 3 \cdot (-24) + 4 \cdot 30 =$$

$$96 + 72 + 120 = 288$$

Επομένως είναι $D \neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3(24+24) - 3(0+4) + 4(0+3) = 3 \cdot 48 - 12 + 12 = 144$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(0+4) - 3(-32+8) + 4(4-0) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-24) + 16 = 8 + 72 + 16 = 96$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3-0) - 3(4-0) + 3(24+6) = -6 - 12 + 3 \cdot 30 = -18 + 90 = 72$$

Επομένως έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{144}{288} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{96}{288} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{72}{288} = \frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right)$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 4

Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος δίνεται από την σχέση:

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 520$$

σε χιλιάδες και x είναι ο αριθμός των προϊόντων.

Αν το κάθε προϊόν πωλείται προς 288 χιλιάδες δραχμές να βρεθούν:

- Πότε η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος και ποιο είναι αυτό.
- Η συνάρτηση του οριακού κόστους.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση κέρδους x μονάδων του προϊόντος είναι:

$$P(x) = 288x - C(x) \text{ ή } P(x) = 288x - x^3 + 6x^2 - 520$$

Έχουμε ότι:

$$P'(x) = (288x - x^3 + 6x^2 - 520)' \text{ ή}$$

$$P'(x) = 288 - 3x^2 + 12x$$

Λύνουμε την εξίσωση $P'(x) = 0$

Είναι:

$$-3x^2 + 12x + 288 = 0 \text{ ή } -3(x^2 - 4x - 96) = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

Έχουμε ότι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-96) = 16 + 384 = 400$$

$$\text{Άρα είναι: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 20}{2}$$

$$x = 12 \text{ ή } x = -8 \text{ (απορρ.)}$$

Μονοτονία της συνάρτησης κέρδους $P(x)$

x	12	
P'(x)	+	-
P(x)	↗	↘
	T.M.	

Μέγιστο κέρδος έχουμε για $x=12$ και είναι:

$$P(12)=288 \cdot 12 - 12^3 + 6 \cdot 12^2 - 520 =$$

$$3456 - 1728 + 864 - 520 = 2072 \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

β) Η συνάρτηση του οριακού κόστους (MC) είναι:

$$MC = \frac{dC(x)}{dx} = 3x^2 - 12x$$

ΙδίατεΡαμαθηματα.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$y = x^4 - 3x^{-2} + \sin x + e^{-x}$$

Να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος y' .

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$y' = (x^4 - 3x^{-2} + \sin x + e^{-x})' = 4x^3 - 3 \cdot (-2)x^{-3} - \eta\mu x + e^{-x} \cdot (-x)' =$$

$$4x^3 + 6x^{-3} - \eta\mu x - e^{-x}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int (2x^3 - 3x^{-2} + 5e^{-x}) dx$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$I = \int (2x^3 - 3x^{-2} + 5e^{-x}) dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^{-2} dx + 5 \int e^{-x} dx =$$

$$2 \cdot \frac{x^4}{4} + c_1 - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c_2 + 5 \cdot (-e^{-x}) + c_3 = \frac{x^4}{2} + 3 \cdot x^{-1} - 5 \cdot e^{-x} + c =$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{3}{x} - 5e^{-x} + c$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$A^2 - 5A + I$$

για τον παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 12 & -6 - 3 \\ 8 + 4 & -12 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix}$$

Επομένως είναι:

$$A^2 - 5A + I = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -20 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8-10+1 & -9+15+0 \\ 12-20+0 & -11-5+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -17 & 6 \\ -8 & -15 \end{bmatrix}$$

ΙδίατεΡαμαθηματα.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 4

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 0 \\4x + y + z &= -1 \\-3x + 2y - z &= 2\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1 - 2) - 2 \cdot (-4 + 3) - 1 \cdot (8 + 3) = -3 - 2 \cdot (-1) - 11 = -3 + 2 - 11 = -12$$

Επομένως είναι $D \neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (1-2) - 1 \cdot (-2-2) = -2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (1-2) - 1 \cdot (8-3) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -1 - 5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (2+2) - 2 \cdot (8-3) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 1

Αν $\varphi(x) = ax^2 + bx - \gamma \sin x$, να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών a, b, γ ώστε να είναι:

$$\varphi(\pi) = \varphi'(\pi) = \varphi''(\pi) = 2$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\varphi(x) = ax^2 + bx - \gamma \sin x$$

1^η Παράγωγος

$$\varphi'(x) = (ax^2 + bx - \gamma \sin x)' = 2ax + b - \gamma \cos x =$$

$$2ax + b - \gamma \cos x = 2ax + b - \gamma \cos x$$

2^η Παράγωγος

$$\varphi''(x) = (2ax + b - \gamma \cos x)' = 2a + \gamma \sin x =$$

$$2a + \gamma \sin x - \beta \gamma \sin x$$

Επομένως είναι:

$$\varphi(\pi) = a\eta\mu^2\pi + \beta\eta\mu\pi - \gamma\sigma\upsilon\nu\pi = \gamma$$

$$\varphi'(\pi) = a\eta\mu 2\pi + \beta\sigma\upsilon\nu\pi + \gamma\eta\mu\pi = -\beta$$

$$\varphi''(x) = 2a\sigma\upsilon\nu 2\pi - \beta\eta\mu\pi + \gamma\sigma\upsilon\nu\pi = 2a - \gamma$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\gamma = 2, \quad -\beta = 2, \quad 2a - \gamma = 2,$$

$$a = 2, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 2$$

ΙδίατεΡαμαθηματα.gr

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \left(\eta\mu 5x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx, \quad I_2 = \int \frac{dx}{5+x^2}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$I_1 = \int \left(\eta\mu 5x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx = \int \eta\mu 5x dx + 3 \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad (1)$$

Όμως είναι:

$$\rightarrow \int \eta\mu 5x dx = -\frac{1}{5} \sigma\upsilon\nu 5x + c_1$$

$$\rightarrow 3 \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = 3 \epsilon\phi x + c_2$$

$$\text{Άρα είναι: } (1) \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{5} \sigma\upsilon\nu 5x + 3 \epsilon\phi x + c$$

Έχουμε ότι:

$$I_2 = \int \frac{dx}{5+x^2} \quad (2)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Θέτουμε $x = \sqrt{5}\varepsilon\varphi t$ και έχουμε ότι $dx = \frac{\sqrt{5}}{\sigma\upsilon\nu^2 t} dt$.

Επιπλέον ισχύει η ταυτότητα: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t} = 1 + \varepsilon\varphi^2 t$

Άρα είναι:

$$(2) \Rightarrow I_2 = \int \frac{1}{5+5\varepsilon\varphi^2 t} \frac{\sqrt{5}}{\sigma\upsilon\nu^2 t} dt = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t} dt =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t} (1+\varepsilon\varphi^2 t) dt = \frac{\sqrt{5}}{5} \int 1 dt = \frac{\sqrt{5}}{5} t + c$$

Επομένως είναι:

$$I_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \varepsilon\varphi^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} x \right) + c \quad \text{ή αλλιώς} \quad I_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{5} x \right) + c$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 4

Η ισότητα $\int \sigma\nu\nu^2 x dx + \int \eta\mu^2 x dx = x$ είναι σωστή;

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\rightarrow \int \sigma\nu\nu^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \sigma\nu\nu 2x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \sigma\nu\nu 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c_1$$

$$\rightarrow \int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \sigma\nu\nu 2x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \sigma\nu\nu 2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c_2$$

Επομένως έχουμε:

$$\int \sigma\nu\nu^2 x dx + \int \eta\mu^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c_1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \eta\mu 2x + c_2 = x + c$$

→ Άρα δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΘΕΜΑΤΑ Α' ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 5

Ποιές τιμές πρέπει να έχουν οι $x, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας A να είναι αντισυμμετρικός.

$$A = \begin{bmatrix} 3x+6 & -2x & 3x+1 \\ -\lambda & 0 & -4x \\ 5 & -8 & x+2 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται αντισυμμετρικός αν ισχύει:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

δηλαδή αν είναι αντίθετα τα στοιχεία που είναι 'συμμετρικά' ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Επομένως έχουμε ότι:

$$a_{12} = -a_{21} \Leftrightarrow -2x = -(-\lambda) \Leftrightarrow \lambda = -2x \quad (1)$$

$$a_{13} = -a_{31} \Leftrightarrow 3x+1 = -5 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$\lambda = -2 \cdot (-2) = 4$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι:

$$x = -2 \quad \text{και} \quad \lambda = 4$$

Για αυτές τις τιμές ο ζητούμενος πίνακας A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν οι τιμές του x ώστε ο πίνακας A να είναι συμμετρικός.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 2-x & 2 & 1 \\ 0 & x^2 & 3 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται συμμετρικός αν ισχύει:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

δηλαδή αν είναι ίσα τα στοιχεία που είναι 'συμμετρικά' ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Επομένως έχουμε ότι:

$$a_{12} = a_{21} \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$a_{32} = a_{23} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad \text{Άρα τελικά είναι: } x = 1$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι '

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 5x & x+1 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Προκειμένου να είναι ίσοι οι παραπάνω πίνακες πρέπει:

$$\rightarrow x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

$$\rightarrow x+1=4 \Leftrightarrow x=3$$

$$\rightarrow x=3$$

Επομένως υπάρχει κοινή λύση ($x=3$) για την οποία οι πίνακες είναι ίσοι.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

αυτοδύναμος;

ΛΥΣΗ

Για να είναι αυτοδύναμος ο πίνακας A θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$A^2 = A$$

Έχουμε ότι

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Τελικά ισχύει ότι: $A^2 = A$

Επομένως ο πίνακας A είναι αυτοδύναμος.

Ιδαιτεραματα.gr

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται ότι: $y = xe^{-x}$.

Να δειχθεί ότι: $xy' - (1-x)y = 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$y' = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} + xe^{-x}(-x)' = e^{-x} - xe^{-x}$$

Επομένως είναι:

$$xy' - (1-x)y = x(e^{-x} - xe^{-x}) - (1-x)xe^{-x} = xe^{-x} - x^2e^{-x} - xe^{-x} + x^2e^{-x} = 0$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 5 (ΘΕΜΑ ΠΡΟΟΔΟΥ)

Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ στη θέση $x=0$ ($f'(0)$) αν:

$$f(x) = e^{-x^2} \eta \mu x - \epsilon \varphi 5x^2 + \sigma \upsilon \nu^2 3x^4$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = (e^{-x^2} \eta \mu x - \epsilon \varphi 5x^2 + \sigma \upsilon \nu^2 3x^4)' =$$

$$(e^{-x^2})' \eta \mu x + e^{-x^2} (\eta \mu x)' - \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 5x^2} (5x^2)' + 2\sigma \upsilon \nu 3x^4 (\sigma \upsilon \nu 3x^4)' =$$

$$e^{-x^2} (-x^2)' \eta \mu x + e^{-x^2} \sigma \upsilon \nu x - \frac{10x}{\sigma \upsilon \nu^2 5x^2} + 2\sigma \upsilon \nu 3x^4 (-\eta \mu 3x^4) (3x^4)' =$$

$$-2xe^{-x^2} \eta \mu x + e^{-x^2} \sigma \upsilon \nu x - \frac{10x}{\sigma \upsilon \nu^2 5x^2} - 24x^3 \sigma \upsilon \nu 3x^4 \eta \mu 3x^4$$

Επομένως είναι: $f'(0) = e^0 \sigma \upsilon \nu 0 = 1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1 + \eta\mu x)$$

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f''(x) + e^{-f(x)} = 0$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

1^η Παράγωγος

$$\rightarrow f'(x) = (\ln(1 + \eta\mu x))' = \frac{1}{1 + \eta\mu x} (1 + \eta\mu x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$$

2^η Παράγωγος

$$\rightarrow f''(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} \right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)' (1 + \eta\mu x) - \sigma\upsilon\nu x (1 + \eta\mu x)'}{(1 + \eta\mu x)^2} =$$

$$\frac{-\eta\mu x - \eta\mu^2 x - \sigma\nu\nu^2 x}{(1 + \eta\mu x)^2} = \frac{-\eta\mu x - 1}{(1 + \eta\mu x)^2} = -\frac{1 + \eta\mu x}{(1 + \eta\mu x)^2} = -\frac{1}{1 + \eta\mu x}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$f''(x) + e^{-f(x)} = -\frac{1}{1 + \eta\mu x} + e^{-\ln(1 + \eta\mu x)} = -\frac{1}{1 + \eta\mu x} + e^{\ln(1 + \eta\mu x)^{-1}} =$$

$$-\frac{1}{1 + \eta\mu x} + (1 + \eta\mu x)^{-1} = -\frac{1}{1 + \eta\mu x} + \frac{1}{1 + \eta\mu x} = 0$$

Σημείωση: Χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

➤ $\eta\mu^2 x + \sigma\nu\nu^2 x = 1$

➤ $e^{\ln g(x)} = g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 \kappa\sigma\upsilon\nu x dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = \eta\mu x \rightarrow du = \kappa\sigma\upsilon\nu x dx$

→ Για $x=0$ είναι $u=0$

→ Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u=1$

Επομένως είναι:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 \kappa\sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$I = \int_0^1 (2x+3)e^{-2x} dx$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$I = \int_0^1 (2x+3)e^{-2x} dx = \int_0^1 (2x+3) \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \right) dx =$$

$$\left[(2x+3) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 + \int_0^1 (2x+3) \frac{e^{-2x}}{2} dx =$$

$$-\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} + \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} + \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 =$$

$$-\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2e^2} + \frac{4}{2} = \frac{4e^2 - 6}{2e^2} = \frac{2e^2 - 3}{e^2}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ' ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 9}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+3}$$

Οπότε είναι:

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{\alpha(x+3)}{x^2 - 9} + \frac{\beta(x-3)}{x^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{\alpha x + 3\alpha + \beta x - 3\beta}{x^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{(\alpha + \beta)x + 3(\alpha - \beta)}{x^2 - 9}$$

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι:

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{και} \quad 3(\alpha - \beta) = 1$$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad \beta = -\frac{1}{6}$$

Το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int \frac{1}{6(x-3)} dx - \int \frac{1}{6(x+3)} dx = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c$$

ιδιαιτεραμαθηματα.gr

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 'ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι'

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Θέτουμε:

$$t = \varepsilon\varphi \frac{x}{2} \rightarrow \dots \rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι:

$$\sin x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\rightarrow \text{Για } x = -\frac{\pi}{2} \text{ είναι } t = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\rightarrow \text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } t = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$$

Το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_{-1}^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} = \int_{-1}^1 \frac{2dt}{2} =$$

$$\int_{-1}^1 \frac{2dt}{2} = \int_{-1}^1 dt = [t]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$$

Ιδαιτερομαθηματα.gr