Κλασική Ηλεκτροδυναμική 2012 - Μουσταkίδης by 1/7,000,000,000

(Λύσεις των ασκήσεων ενδέχεται να είναι λάθος)

3/3 Κλασική Ηλεκτροδυναμική Μάθημα 1º ?

Μαθηματική Εισαγωγή (Σημειώσεις από Τάσο)

Εσωτερικό γινόμενο: $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

Αν $\vec{A} = \vec{A}(A_1, A_2, A_3)$ κ $\vec{B} = \vec{B}(B_1, B_2, B_3) \rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = \Sigma A_i B_i = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

Ισχύουν: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$, $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

Αν $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ και $\vec{A},\vec{B} \neq$ μηδενικά διανύσματα $\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow \vec{A}\perp\vec{B}$

Εξωτερικό γινόμενο: $\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\hat{n}$ ($\hat{n}$: διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{A},\vec{B}$)

Αν $\vec{A} = \vec{A}(A_1, A_2, A_3)$ κ $\vec{B} = \vec{B}(B_1, B_2, B_3) \rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(A_2B_3 - B_2A_3) - \hat{j}(A_1B_3 - B_1A_3) + \hat{k}(A_1B_2 - B_1A_2)$

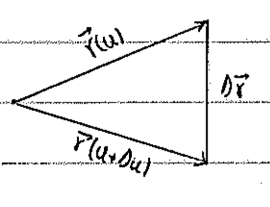
Ισχύουν: $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$, $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

Αν $\vec{A},\vec{B}$ μη μηδενικά διανύσματα κ $\vec{A}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A}\parallel\vec{B}$

Τριπλό γινόμενο: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ (Να αποδειχθεί)

$$\left.\begin{array}{l} \text{i. } \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \\ \text{ii. } \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \\ \text{iii. } (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A} \end{array}\right\}$$ Ταυτότητες που ισχύουν

Διαφορικός λογισμός



$\lim_{\Delta u\to 0} \dfrac{\vec{r}(u+\Delta u) - \vec{r}(u)}{\Delta u} = \dfrac{d\vec{r}(u)}{du}$: παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Αν $\vec{r}(u) = x(u)\hat{i} + y(u)\hat{j} + z(u)\hat{k}$, τότε $\dfrac{d\vec{r}}{du} = \dfrac{dx(u)}{du}\hat{i} + \dfrac{dy(u)}{du}\hat{j} + \dfrac{dz(u)}{du}\hat{k}$

Έστω $\vec{A} = \vec{A}(u)$ κ $\vec{B} = \vec{B}(u)$, τότε ισχύουν:

1. $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\pm\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du} \pm \dfrac{d\vec{B}}{du}$ (πρόσθεση)

2. $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\vec{B} + \vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{du}$ (βαθμωτό γινόμενο)

3. $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{du}$ (διανυσματικό γινόμενο)

Ίδιες ιδιότητες ισχύουν και στις μερικές παραγώγους

Αν $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$ τότε $d\vec{A} = dA_1\hat{i} + dA_2\hat{j} + dA_3\hat{k}$

Για $\vec{A}, \vec{B}$ ισχύουν: $d(\vec{A}\cdot\vec{B}) = d\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot d\vec{B}$

$$d(\vec{A}\times\vec{B}) = d\vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times d\vec{B}$$

Για $\phi = \phi(x,y,z)$ ισχύει: $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$

Διαφορικοί τελεστές

Ορίζουμε τον τελεστή: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ (στις καρτεσιανές συντεταγμένες)

Κλίση βαθμωτής συνάρτησης $\phi = \phi(x,y,z)$: $\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$

Απόκλιση διανύσματος $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$

Στροβιλισμός διανύσματος: $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\hat{k}$

Ιδιότητες

i. $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A} + \phi(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

ii. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

iii. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi$$

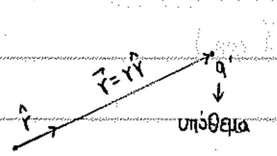
iv. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$

v. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

vi. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ (γενική επισκόπηση) (κατά πάσα πιθανότητα δεν ανήκει στο πρώτο μάθημα)

1 Νόμος Coulomb (1795)

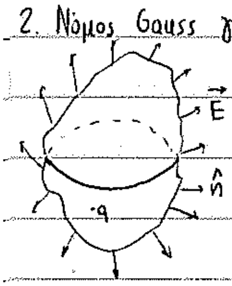


$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^3}\vec{r}$ ($\hat{r}$: μοναδιαίο στη διεύθυνση της δύναμης)

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$: ένταση ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το φορτίο q στη θέση του q'

(Το q' πρέπει να είναι μικρό, γιατί δημιουργεί και αυτό πεδίο, στην ουσία είναι $\vec{E} = \lim_{q'\to 0}\frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$)

2. Νόμος Gauss για ηλεκτρικό πεδίο



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ για q: σημειακό φορτίο

Αν έχουμε κατανομή φορτίου: $dq = \rho dV \rightarrow q = \iiint_V \rho dV$

Όγκος περικλείεται από κλειστή επιφάνεια → $\hat{n}$ πάντα προς τα έξω

3. Δύναμη Laplace

$\vec{F} = q\vec{u}\times\vec{B}$, $d\vec{F} = dq\,\vec{u}\times\vec{B}$: δύναμη που ασκείται σε κινούμενο φορτίο

Αλλά $dq\,\vec{u} = dq\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dq}{dt}\vec{r} = I\vec{r}$

Επομένως $d\vec{F} = I\,d\vec{r}\times\vec{B} \rightarrow \vec{F} = \int_C I\,d\vec{r}\times\vec{B}$

Εφαρμογή

Αν $\vec{B}$ ομογενές ($\vec{B}$: con.), τότε νδο $\oint_C I\,d\vec{r}\times\vec{B} = 0$

Έστω $\vec{B} = B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}$, επομένως $d\vec{r}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(B_3dy - B_2dz) - \hat{j}(B_3dx - B_1dz) + \hat{k}(B_2dx - B_1dy)$

Επομένως: $\oint_C I\,d\vec{r}\times\vec{B} = \oint_C I\left[\hat{i}(B_3dy - B_2dz) - \hat{j}(B_3dx - B_1dz) + \hat{k}(B_2dx - B_1dy)\right]$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορούμε να το σπάσουμε σε τρία

$\oint_C \hat{i}(B_3dy - B_2dz) = \hat{i}\left(\oint_C B_3\cancel{dy}^{\,0} - \oint_C B_2\cancel{dz}^{\,0}\right)$, γιατί $\oint_C dy = \oint_C dz = \oint_C dx = 0$

Ομοίως και τα άλλα δύο ολοκληρώματα δίνουν 0

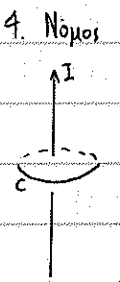
Εν γένει: για $\vec{A}$: con $\rightarrow \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$, γιατί $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \underset{\text{Stokes}}{=} \oiint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = 0$ ($\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$, για $\vec{A}$: con.)

Άσκηση

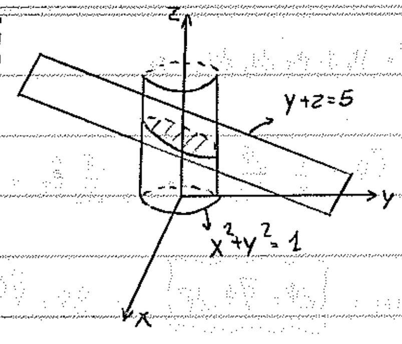
Αν $\vec{B} = xy^2\hat{i} + yz\hat{j} + x^2y\hat{k}$, τότε να βρείτε:

$\vec{F} = \oint_C I\,d\vec{r}\times\vec{B}$ (για $I = 1$) όπου c η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ και της $y+z=5$

4. Νόμος Ampere (1820)



Ένας αγωγός διαρρέεται από ρεύμα και δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, για το οποίο ισχύει: $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$ → Νόμος Ampere



όπου

$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J}\cdot \hat{n}\, dS$, όπου $\vec{J} = \rho\vec{v}$,

δηλαδή η ροή μέσα από μια επιφάνεια

5. Νόμος Gauss για μαγνητικό πεδίο

$\oiint \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = 0$ → δυναμικές γραμμές μαγν. πεδίου κλειστές → όσες μπαίνουν, τόσες βγαίνουν από μια κλειστή επιφάνεια → δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα

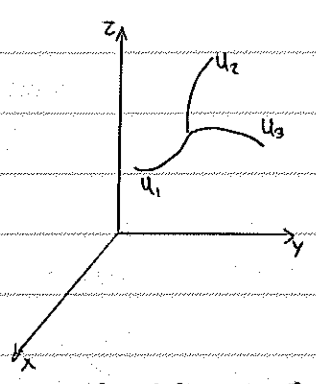
Άσκηση

Νδο $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ (υπόδειξη $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{J}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\overbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}^{0} - \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$, άρα $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} - \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$

<u>καμπυλόγραμμες συντεταγμένες</u>



$x = x(u_1, u_2, u_3)$

$y = y(u_1, u_2, u_3)$

$z = z(u_1, u_2, u_3)$

$\hat{e}_i = \frac{\partial\vec{r}/\partial u_i}{|\partial\vec{r}/\partial u_i|}$: μοναδιαία διανύσματα

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} = h_i\hat{e}_i$

$h_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right|$: συντελεστής κλίμακας

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$ Επομένως $ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ds^2 = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3\right)\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3\right) = (h_1du_1\hat{e}_1 + h_2du_2\hat{e}_2 + h_3du_3\hat{e}_3)^2$$

Τελικά $ds^2 = h_1^2du_1^2 + h_2^2du_2^2 + h_3^2du_3^2$, γιατί $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij}$

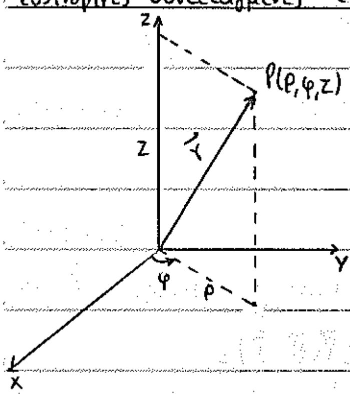
$dV = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3$

πχ. $\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\hat{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\hat{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}\hat{e}_3 = f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2 + f_3\hat{e}_3$, με $f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}$

Ισχύει : $\boxed{d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}} \rightarrow d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = (f_1\hat{e}_1 + f_2\hat{e}_2 + f_3\hat{e}_3)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}du_3\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &d\phi = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 \quad (\text{γιατί } \hat{e}_i \cdot f_i \hat{e}_i = f_i) \\ &\text{Αλλά } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3}du_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial u_i} = h_i f_i$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z)



$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$

$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_\rho$, $\hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_z$

$\hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j} \rightarrow h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = |\cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}| = 1$

$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} \rightarrow h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = |-\rho\sin\varphi\,\hat{i} + \rho\cos\varphi\,\hat{j}| = \rho$

$\hat{e}_z = \hat{e}_z = \hat{k} \rightarrow h_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1$

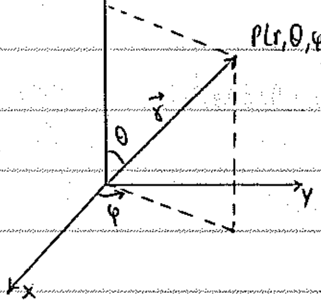
Χρήσιμοι τύποι:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi}A_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_3)\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_1 & \rho A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ)



$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$

$\hat{e}_1 \rightarrow \hat{e}_r$, $\hat{e}_2 \rightarrow \hat{e}_\theta$, $\hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_\theta$

$0 \le r < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi$$

Εφαρμογές

1. Να δειχθεί ότι $\nabla^2(1/r)=0$

$$\nabla^2(1/r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[1/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x =$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} = (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\left[-(x^2+y^2+z^2)+3x^2\right] =$$

$$= (2x^2-y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$$

Ομοίως $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = (-x^2+2y^2-z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$ κ $\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = (-x^2-y^2+2z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$

Το άθροισμά τους δίνει μηδέν (μπορούμε να λέμε ότι η $\nabla^2\phi=0$, έχει μια λύση την $\phi=1/r$)

Σε σφαιρικές συντεταγμένες $\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}$

Επομένως: $\nabla^2(1/r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}(1/r)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-1) = 0$

2. Νδο $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=0$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y & \partial\phi/\partial z\end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)=0$$

Άσκηση

Νδο $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$

3. Αν ισχύει $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$ κ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ κ $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ νδο $\nabla^2\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$, όπου $A: \vec{E}$ ή $\vec{H}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) \Rightarrow \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Ομοίως για $\vec{H}$ έχουμε: $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\cancelto{0}{\vec{\nabla}\cdot\vec{H}}) - \nabla^2\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \Rightarrow -\nabla^2\vec{H} = -\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

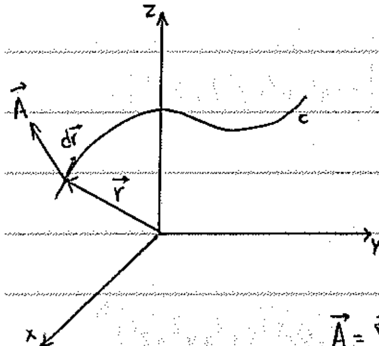
6/3 Μάθημα 2ο ή 3ο

$\varphi = \varphi(x,y,z) \rightarrow \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z) \rightarrow \nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_1\hat{i} + \nabla^2 A_2\hat{j} + \nabla^2 A_3\hat{k}$

Εν γένει: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \neq \nabla^2\vec{A}$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα



$$\left.\begin{array}{l} I_c = \int_c \vec{A}\cdot d\vec{r} \\ d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,ds = \vec{t}\,ds \end{array}\right\} \Rightarrow I_c = \int_c \vec{A}\cdot\vec{t}\,ds$$

$\vec{t}$: εφαπτόμενο διάνυσμα

$$I_c = \int_c A_1dx + A_2dy + A_3dz$$

$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ με $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 \rightarrow I_c$: ανεξάρτητο καμπύλης ολοκλήρωσης

$I = \int_c \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_1} \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_1} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1)$ πχ. βαρυτικό ή πεδίο Coulomb

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $d\phi = \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}$ $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$

$\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

Επιεπιφάνεια ολοκληρώματα : $I = \iint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS$

Θεώρημα απόκλισης (Gauss): $\oiint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV$, S: κλειστή επιφάνεια που περικλείει τον όγκο

πρέπει να ορίζεται το πεδίο σε κάθε σημείο του όγκου

Ιδιότητες

1. $\oiint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \left[\phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)\right]dV$

2. $\oiint_S (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dV$

3. $\oiint_S \underbrace{(\hat{n}\times\vec{A})}\,dS = \iiint_V (\vec{\nabla}\times\vec{A})\,dV$ → Άσκηση, να αποδειχθεί

διάνυσμα βγαίνει εκτός ολοκληρώματος, ολοκληρώνουμε κάθε συνιστώσα $\iint_S \vec{A}\,dS = \iint A_1 dS\hat{i} + \ldots$

Απόδειξη της 1

Θέτουμε: $\vec{A} = \phi\vec{\nabla}\psi$, ισχύει $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{B}) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{B} + \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$, επομένως

$$\oint\!\!\oint_S (\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot\hat{n}\,dS = \oint\!\!\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)\,dV = \iiint_V\left[(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) + \phi\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\psi)\right]dV =$$

$$= \iiint_V (\phi\nabla^2\psi + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi)\,dV$$, ισχύει $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi$

Θεώρημα στροβιλισμού (Stokes) : $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,dS$

Αν $\vec{A}$: συντηρητικό πεδίο $\rightarrow \vec{A} = \vec{\nabla}\phi \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

$\vec{\nabla}\phi = \lim_{\Delta V\to 0} \dfrac{\oint\!\!\oint_{\Delta S}\phi\,\hat{n}\,dS}{\Delta V}$, ανεξ. συστήματος συντεταγμένων

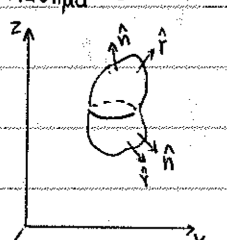
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0} \dfrac{\oint\!\!\oint_{\Delta S}\vec{A}\cdot\hat{n}\,dS}{\Delta V}$, $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0} \dfrac{\oint\!\!\oint_{\Delta S}\hat{n}\times\vec{A}\,dS}{\Delta V}$

Άσκηση

$\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 3 \rightarrow$ νδ

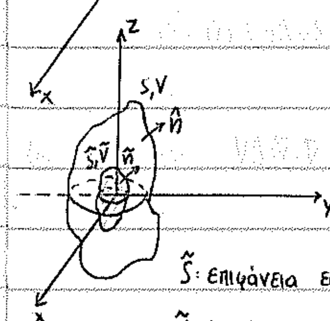
(Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε όγκο που να εξαρτάται από μία παράμετρο, πχ. όγκος σφαίρας ακτίνας R με κέντρο (0,0,0) και όταν $\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 0$)

9/3 Μάθημα 3ο



$I = \oint\!\!\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,dS = \oint\!\!\oint \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}\,dS$, για $\vec{A} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$I = \begin{cases} 0, & \text{αν } (0,0,0) \text{ εκτός του όγκου } V \\ 4\pi, & \text{αν } (0,0,0) \text{ εντός } \text{ -||- } \end{cases}$$ (γιατί στην αρχή των αξόνων $r=0 \rightarrow 1/r^2 \rightarrow \infty$)



Στην πρώτη περίπτωση → Gauss

$I = \oint\!\!\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)dV$, $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0$

Στην δεύτερη περίπτωση στο $(0,0,0) \rightarrow$ απειρισμός

$\tilde{S}$: επιφάνεια εσωτερικής σφαίρας

$\tilde{V}$: όγκος ανάμεσα στις δύο σφαίρες

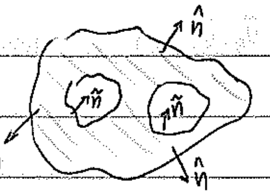
Γύρω από το (0,0,0) δημιουργούμε σφαίρα ακτίνας a → άρα Gauss ισχύει ανάμεσα στους δύο όγκους

$$I = \iint_{S+\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = \iint_{S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS + \iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS$$

Όμως $\iint_{S+\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = \iiint_{\tilde V} \vec\nabla\cdot\left(\frac{\vec r}{r^3}\right) dV = 0$

$$\Rightarrow \iint_{S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS + \iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = 0 \Rightarrow \iint_{S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = -\iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS$$

$$\hat n = \frac{\vec\nabla\phi}{|\vec\nabla\phi|} = -\frac{\vec r}{a}$$



$$\iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = \iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\left(-\frac{\vec r}{a}\right) dS = -\frac{1}{a}\iint_{\tilde S} \frac{r^2}{r^3} dS = -\frac{1}{a}\iint_{\tilde S} \frac{1}{r} dS =$$

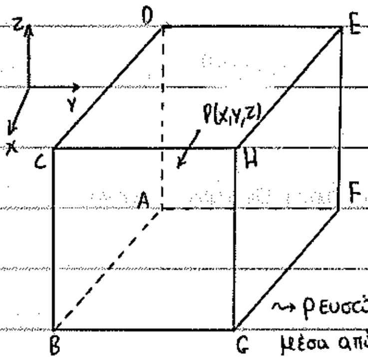
$$= -\frac{1}{a}\iint_{\tilde S} \frac{1}{a}\cdot a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = -4\pi$$

γιατί r=a : const.

κινούμαστε στην επιφάνεια της εσωτερικής σφαίρας

Επομένως $\iint_{S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = -\iint_{\tilde S} \frac{\vec r}{r^3}\cdot\hat n\, dS = -(-4\pi) = 4\pi$ ✓

(πολλά λάθη έκανε ο Μουστακίδης)

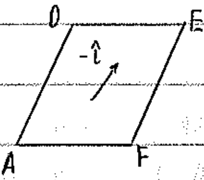


→ ρευστό διέρχεται μέσα από τον όγκο

$\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$, $P(x,y,z)$: κέντρο όγκου

$\vec V \Delta s = \frac{d\vec x}{dt}\Delta s$ ποσότητα ρευστού που εξέρχεται

1ος προς τον άξονα x : $V_1 \rightarrow$ DAFE : $\vec V_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec V_1}{\partial x}\Delta x$



$$\left.\begin{aligned} &\vec V_1 = a^2\,\hat\imath \\ &\vec V_1\cdot \Delta y\Delta z\,(-\hat\imath) \end{aligned}\right\} -a^2\,\Delta x\Delta y$$

CHGB: $\left(\vec V_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec V_1}{\partial x}\Delta x\right)\cdot\hat\imath\;\Delta y\Delta z$

$\left(\vec V_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec V_1}{\partial x}\Delta x\right)\cdot(-\hat\imath)$ → αυτό που βγαίνει

Συνολική ροή ως προς τον x προς τα έξω $= \left(\vec V_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec V_1}{\partial x}\Delta x\right)\cdot(-\hat\imath) + \left(\vec V_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec V_1}{\partial x}\Delta x\right)\cdot\hat\imath = \frac{\partial V_1}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$ (1)

Ροή (y) $= \frac{\partial V_2}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z$ (2)

(1)∧(2)∧(3): Ροή $= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z = \vec\nabla\cdot\vec V\,\Delta V$

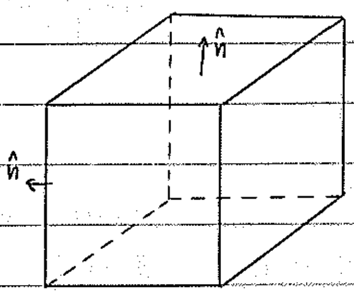
Ροή (z) $= \frac{\partial V_3}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y$ (3)

$$\text{Ροή} = \frac{\text{Ροή (προς τα έξω)}}{\Delta V}$$

Εξίσωση συνέχειας

Ρευστό με $\rho(x,y,z,t)$ κ $\vec{V}(x,y,z,t)$

Αν δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες νδο $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, με $\vec{J}=\rho\vec{V}$



$M=\iiint_V \rho\, dV \rightarrow \frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$

ρευστό μπαίνει/βγαίνει

$\frac{\partial M}{\partial t}$: ρευστό εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου

$\frac{\partial M}{\partial t}=\oiint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS=\oiint_S \rho\vec{V}\cdot\hat{n}\,dS=\underbrace{\iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})dV}_{\text{μάζα που εισέρχεται}}$

$\frac{\partial M_{εισ}}{\partial t}+\frac{\partial M_{εξ}}{\partial t}=0 \Rightarrow \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV+\iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})dV=0 \Rightarrow \iiint_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{U})\right]dV=0 \Rightarrow \iiint_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\right)dV=0 \Rightarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ (επειδή τα προηγούμενα ισχύουν για οποιοδήποτε όγκο V)

(δεν ισχύει εν γένει $\int_a^{\beta} f(x)\,dx=0 \Rightarrow f(x)=0$)

Ειδική περίπτωση: $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \rho$: con. $\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ (ασυμπίεστο υγρό)

15/3 Μάθημα 4ο

Coulomb: $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{r}$, $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$

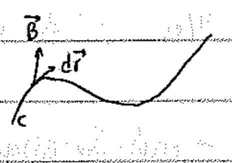
Gauss: $\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV=\frac{q}{\varepsilon_0}$, $q=\iiint_V \rho\, dV$

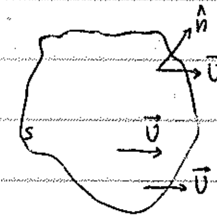
laplace: $\vec{F}=q\vec{U}\times\vec{B}$

$d\vec{F}=I\,d\vec{r}\times\vec{B} \rightarrow \vec{F}=\int_C I\,d\vec{r}\times\vec{B}$

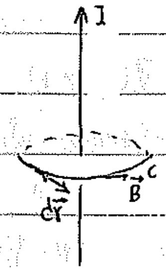
Νόμος Ampere (1820)

$\underbrace{I_B}_{\text{κυκλοφορία μαγν. πεδίου κατά μήκος καμπύλης}}=\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r}$, $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0 I \Rightarrow \iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,dS=\mu_0\iint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

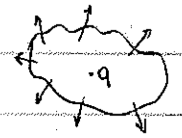




$$I=\iint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS=\iint_S \rho\vec{\upsilon}\cdot\hat{n}\,dS \quad \text{, αφού } \vec{J}=\rho\vec{\upsilon}$$

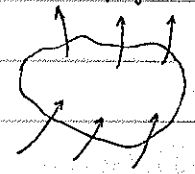


Gauss σε ηλεκτρικό πεδίο



$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

Gauss σε μαγνητικό πεδίο

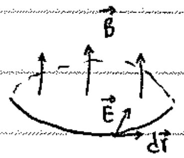


$$\oiint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS=0 \rightarrow \nexists \text{ μαγνητικά μονόπολα}$$

Δυναμικές γραμμές μαγν. πεδίου κλειστές

ροή μαγν. πεδίου μέσα από κλειστή επιφάνεια μηδενική

Νόμος Faraday - Henry (1831)

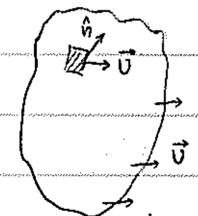


$I_E=\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r}$: κυκλοφορία ηλεκτρικού πεδίου

$d\vec{r}$: στοιχειώδες εφαπτόμενο διάνυσμα

$\phi_B=\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r}=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS} \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}=\iint_S -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\,dS \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$



ροή φορτίων

$$dq=\rho\,dV=\rho\,d\vec{r}\cdot d\vec{S}=\rho\vec{\upsilon}dt\cdot\hat{n}dS=\rho\,dt(\vec{\upsilon}\cdot\hat{n})dS$$

$$I=\frac{dq}{dt}=\rho\vec{\upsilon}\cdot\hat{n}\,dS$$

Επειδή $\vec{J}=\rho\vec{\upsilon} \rightarrow I_{tot}=\iint_S \underbrace{\vec{J}\cdot\hat{n}\,dS}_{\text{ροή πυκνότητας ρεύματος}}=\iint \rho\vec{\upsilon}\cdot\hat{n}\,dS$

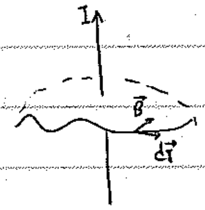
Νόμος Gauss σε ηλεκτρικό πεδίο

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=q/\varepsilon_0 \qquad dq=\rho\,dV \Rightarrow q=\iiint_V \rho\,dV \rightarrow \rho=\rho(\vec{r})=\begin{cases}\rho(x,y,z)\\ \rho(r,\theta,\varphi)\\ \rho(r,\theta,z)\end{cases} \text{ : πυκνότητα φορτίου}$$

$\downarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ → επειδή δεν βάλαμε περιορισμούς στον όγκο → ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από όγκο

Νόμος Ampere



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\, dS = \iint_S \mu_0\vec{J}\cdot\hat{n}\, dS \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$, ισχύει $\forall\, S$

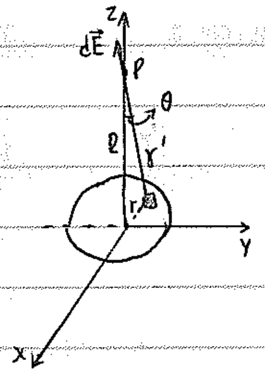
$$I = \iint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\, dS$$

Νόμος Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\hat{n}\, dS = \iint_S -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, dS \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \left(\frac{d}{dt}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{df}{dt}dx\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow [E]/m = [B]/s \Rightarrow \frac{V}{m^2} = \frac{T}{s}$$

Άσκηση



Φορτίο είναι συγκεντρωμένο σε κυκλικό δίσκο στο επίπεδο xy

Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η κατανομή φορτίου, σε ένα σημείο P του άξονα z, σε απόσταση ℓ από την κατανομή. Η ακτίνα του κυκλικού δίσκου είναι a.

Η επιφανειακή πυκνότητα $\rho\equiv\sigma$ είναι σταθερή. Θεωρούμε στοιχειώδη επιφάνεια dS φορτίου dq

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma\, dS$$

$dS = r\,dr\,d\varphi \rightarrow dq = \sigma r\,dr\,d\varphi$, r: απόσταση της dS από το κέντρο της κατανομής $(0,0,0)$

$d\varphi$: στοιχειώδης επίκεντρη γωνία, η οποία βαίνει στην dS

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r'^2}\hat{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r\,dr\,d\varphi}{\ell^2+r^2}\hat{r}'$$: ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το στοιχειώδες φορτίο στο σημείο P

Μπορούμε να αναλύσουμε το $d\vec{E}$ σε δύο συνιστώσες: $d\vec{E} = d\vec{E}_z + d\vec{E}_{xy}$

Λόγω συμμετρίας το συνολικό $\vec{E}$ στο P θα έχει συνιστώσα μόνο στον άξονα z, επομένως

$$\vec{E} = \int d\vec{E}_z \,, \quad d\vec{E}_z = dE\cos\theta\,\hat{z} = dE\,\frac{\ell}{r'}\hat{z} = dE\,\frac{\ell}{(\ell^2+r^2)^{1/2}}\hat{z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r\,dr\,d\varphi}{\ell^2+r^2}\cdot\frac{\ell}{(\ell^2+r^2)^{1/2}}\hat{z}$$

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ell\int_{r=0}^{a}\frac{r}{(\ell^2+r^2)^{3/2}}dr\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ell\int_{r=0}^{a}\frac{r}{(\ell^2+r^2)^{3/2}}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ell\int_0^a r(\ell^2+r^2)^{-3/2}dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ell\int_0^a d\left[-(\ell^2+r^2)^{-1/2}\right] =$$

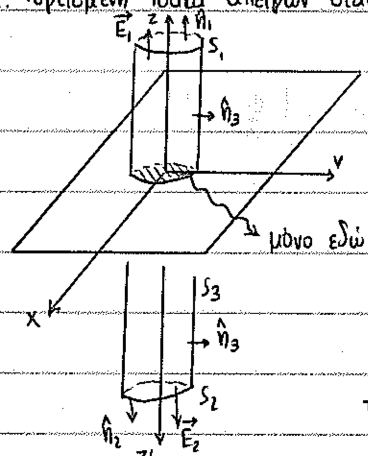
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ell\,(\ell^2+r^2)^{-1/2}\Big|_a^0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ell\left(\frac{1}{\ell}-\frac{1}{\sqrt{\ell^2+a^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(a/\ell)^2}}\right)$$, άρα $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1+(a/\ell)^2}}\right]\hat{z}$

Συμβολή Maxwell

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$ Θα πρέπει οι εξισώσεις να είναι πιο συμμετρικές, δηλ. $\vec{\nabla}\times\vec{B} \sim \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\hat{n}\, dS$$

πχ. Φορτισμένη πλάκα απείρων διαστάσεων



Η επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας είναι σταθερή

Έστω S_1 κ S_2 οι επιφάνειες των βάσεων του κυλίνδρου και S_3 η παράπλευρη επιφάνεια

Χρησιμοποιούμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss για να εκμεταλλευτούμε τις συμμετρίες

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \iint_{S_1}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS + \iint_{S_2}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS + \cancelto{0}{\iint_{S_3}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

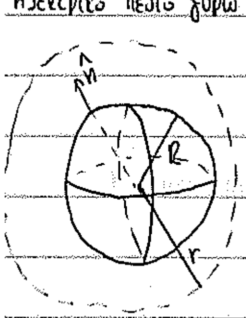
Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η πλάκα έχει ίδια διεύθυνση με τον z

$$\iint_{S_1} E\,dS + \iint_{S_2} E\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow ES + ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$$

Όμως $\sigma = \frac{q}{S}$, άρα $\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

20/3 Μάθημα 5ο

Ηλεκτρικό πεδίο γύρω από σφαιρική κατανομή



$\rho(\vec{r}) = \rho(r)$: con.

Ηλεκτρικό πεδίο εκτός σφαίρας

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \oiint_S E(r)\,\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r\,dS = \oiint_S E(r)\,dS = E(r)\oiint_S dS = E(r)\,S(r) = 4\pi r^2 E(r) \quad (2)$$

$$\oiint_S dS = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$(1)\wedge(2) \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{e}_r$$

Εν γένει για $\rho(r) \neq$ con., έχουμε: $\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(r')\,dV$, r': για να μην συγχέεται το όριο ολοκλήρωσης με τη μεταβλητή

Άρα έχουμε: $\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\rho(r')r'^2\sin\theta\, dr'd\theta d\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r r'^2\rho(r')dr' \rightarrow$

$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r r'^2\rho(r')dr' \Rightarrow E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\rho(r')dr'$

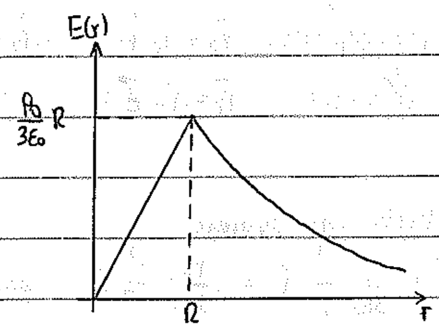
Εκτός σφαίρας: $R \leq r' \rightarrow E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\int_0^R r'^2\rho(r')dr' + \int_R^r r'^2 \cancel{\rho(r')}dr'\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^R r'^2\rho(r')dr'$

Εντός σφαίρας: $0 \leq r' < R \rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\rho(r')dr'}$

Για $\rho = \rho_0$: con.

Εντός σφαίρας: $E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\rho_0\int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{3}r^3 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r$ ✓

(Επειδη $\rho_0 = \frac{q}{V} = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi r^3} \rightarrow E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{3}{4}\frac{q}{\pi r^3}\cdot r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$



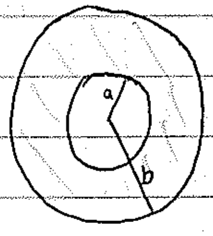
Εκτός σφαίρας: $E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\rho_0\int_0^R r'^2 dr' = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{3}R^3 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$ ✓

Όπως και προηγουμένως: $E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3}\frac{R^3}{r^2} \rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ ✓

συμφωνεί με το αρχικό αποτέλεσμα

Ασκηση

Κατανομή φορτίου σε σφαιρικό κέλυφος, να βρεθεί E για τις 3 διαφορετικές περιοχές



Πυκνότητα φορτίου σταθερή ρ_0 (ομοιόμορφη κατανομή)

a. Ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη μικρή σφαίρα

$\rho = 0 \rightarrow E = 0$

b. Ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στις δύο σφαίρες

$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \oint\!\!\oint_S E\, dS = E\oint\!\!\oint_S dS = ES = E\cdot 4\pi r^2 \quad (1)$

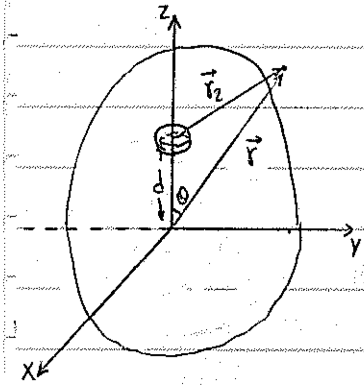
$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV = \frac{\rho_0 V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3) \quad (2)$

$(1)\wedge(2) \rightarrow E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{r^3 - a^3}{r^2}$

c. Εκτός των σφαιρών ηλεκτρ. πεδίο

$4E\pi r^2 = \frac{4\rho_0}{3\varepsilon_0}\pi(b^3 - a^3) \Rightarrow E = \frac{4\rho_0}{4 3\varepsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\rho_0(b^3 - a^3)\frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

23/3 Μάθημα 6ο



Ομοιόμορφη σφαιρική κατανομή γύρω από το (0,0,0) με ακτίνα b

Αφαιρούμε σφαιρικό κομμάτι ακτίνας α πάνω στο z του οποίου το κέντρο απέχει απόσταση d από το κέντρο της σφαιρικής κατανομής , $\vec{d} = d\hat{z}$

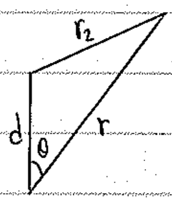
Ψάχνουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο P (τυχαίο)

$Q = \rho_0 V \Rightarrow Q = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (b^3 - a^3)$: φορτίο που υπάρχει στο σφαιρικό κέλυφος

$\vec{E}_2$: ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται στην κοιλότητα

$\vec{E}_1$: -||- -||- που οφείλεται σε όλο το υπόλοιπο κομμάτι της σφαίρας

Πρέπει : $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E} + (-\vec{E}_2)$, $\vec{E}$: ηλεκτρ. πεδίο αν όλη η σφαίρα είχε φορτίο



Κανόνας συνημιτόνων : $r_2 = (r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{1/2}$

$\vec{r}_2 = r_2 \hat{r}_2$, $\hat{r}_2 = \frac{\vec{r} - \vec{d}}{r_2}$: μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\vec{r}_2$

$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{d}$

A. Εκτός της σφαίρας

$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{b^3}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{b^3}{r^3} \vec{r}$ (από προηγούμενο πχ) : ηλεκτρ. πεδίο που δημιουργείται αν όλη η σφαίρα ήταν φορτισμένη

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \frac{a^3}{r_2^3} \vec{r}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} a^3 \frac{\vec{r} - \vec{d}}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

Επομένως : $\vec{E}_1 = \vec{E} + (-\vec{E}_2) = \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{b^3}{b^3 - a^3} \left[\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{a^3}{b^3} \frac{\vec{r} - \vec{d}}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}} \right]$

- Αν $d = 0 \rightarrow$ λύση προηγούμενης άσκησης

B. Εντός σφαίρας και εκτός κοιλότητας

$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{r}$: ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας στο εσωτερικό της

$\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} a^3 \frac{\vec{r} - \vec{d}}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}}$: δεν αλλάζει , γιατί συνεχίζουμε να είμαστε εκτός της κοιλότητας

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + (-\vec{E}_2) \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{b^3 - a^3} \left[\vec{r} - a^3 \frac{\vec{r} - \vec{d}}{(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta)^{3/2}} \right]$$

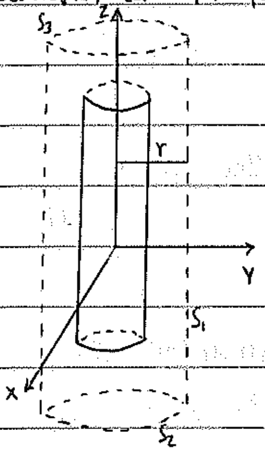
Γ. Μέσα στην κοιλότητα

$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{r}$, $\vec{E}_2 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} (\vec{r} - \vec{d}) \rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{d}}{b^3 - a^3}$

Σφαιρικές συντεταγμένες: $dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

κυλινδρικές -II- : $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$, $dS = r\, d\varphi\, dr$?

κυλινδρική κατανομή φορτίου "απείρου μήκους"



S_1: παράπλευρη επιφάνεια, S_2, S_3: επιφάνεια βάσεων κυλίνδρου

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS + \cancelto{0}{\iint_{S_2} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS} + \cancelto{0}{\iint_{S_3} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS}$$, γιατί $\vec{E}$ έχει κάθετο στον άξονα z

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \iint_{S_1} E\, dS = E\iint_{S_1} dS = ES_1 = E\cdot 2\pi r h \quad (1)$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \overset{*}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho(r')\, r'dr'd\varphi dz = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r'=0}^{r} r'\rho(r')dr' \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=-h/2}^{h/2} dz \overset{**}{\Rightarrow}$$

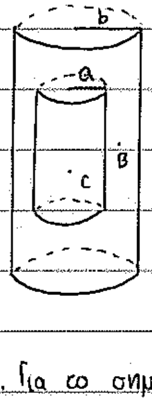
$$\oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{2\pi}{\varepsilon_0} h \int_0^r r'\rho(r')dr' \quad (2)$$

** (τα όρια ολοκλήρωσης για την μεταβλητή z δεν έχουν φυσική σημασία αν είναι $-h/2 \to h/2$ ή $0 \to h$, θα πρέπει να δίνει το ολοκλήρωμα σε κάθε περίπτωση το ύψος h του κυλίνδρου)

* $dV = r\, dr\, d\varphi\, dz$: στις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$(1)\wedge(2) \to \frac{2\pi}{\varepsilon_0} h \int_0^r r'\rho(r')dr' = E\cdot 2\pi r h \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_0^r r'\rho(r')dr'}$$ (ανεξάρτητο ύψος κυλίνδρου)

Άσκηση



κατανομή φορτίου στο κυλινδρικό κέλυφος

Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία A, B, C

(Να θεωρηθεί ότι το ύψος των κυλίνδρων $h \to \infty$)

α. Για το σημείο C

Στον όγκο του εσωτερικού κυλίνδρου δεν υπάρχει φορτίο $\to \rho = 0 \to E_C = 0$

β. Για το σημείο B

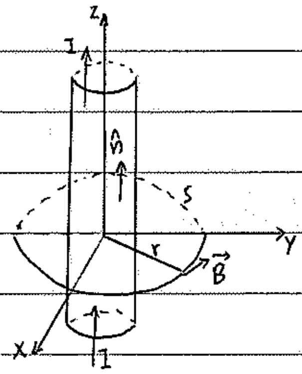
$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_a^r r'\rho(r')dr'$$, για $\rho(r') = \rho_0$: con. $\to E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_a^r r'dr' = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r} r'^2\Big|_a^r = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{r^2-a^2}{r}$

γ. Για το σημείο A

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_a^b r'\rho(r')dr' \xrightarrow[\rho=\rho_0]{} E(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{b^2-a^2}{r}$$

$dl = r\,d\varphi$

Νόμος Ampere



$\vec{J} = J(r)\hat{z}$: πυκνότητα ρεύματος

$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$ κυκλικός δίσκος επιφάνειας S

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{r} = \oint_c \vec{B}\cdot \frac{d\vec{r}}{ds}ds = \oint_c \vec{B}\cdot\hat{t}\,dr = \oint_c B ds = B\oint_c ds = Bs = B\,2\pi r \quad (1)$$

ds: στοιχειώδες μήκος κύκλου $\hat{t}$: μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

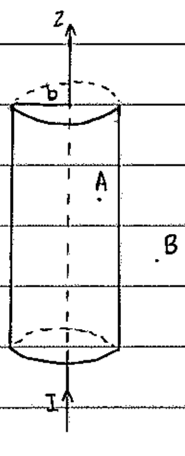
$$I = \iint_S \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S J(r)\hat{z}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S J(r)\,dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\int_{r'=0}^{r} r' J(r')\,dr' = 2\pi\int_0^r r' J(r')\,dr' \quad (2)$$

$$(1)\wedge(2):\ B\,2\pi r = 2\pi\mu_0\int_0^r r' J(r')\,dr' \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{r}\int_0^r r' J(r')\,dr'}$$

Άσκηση

Κυλινδρική κατανομή φορτίου με πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}(r) = c e^{-dr^2}\hat{z}$ ή $\vec{J}(r) = \begin{cases} a\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right), & r\le b \\ 0, & r\geq b\end{cases}$

Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα σημεία A και B



$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{n}\,dS = \iint_S \mu_0\vec{J} \Rightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \iint_S \mu_0\vec{J}\cdot d\vec{S}$$ όπου

S: επιφάνεια κυλίνδρου και C: περιφέρεια κύκλου

$$\iint_S \mu_0\vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu_0\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\int_{r'=0}^{r} r' J(r')\,dr' = 2\pi\mu_0\int_0^r r' c e^{-dr'^2}dr' = 2\pi c\mu_0\int_0^r d(e^{-dr'^2})\cdot\left(-\frac{1}{2d}\right) \Rightarrow$$

$$\iint_S \mu_0\vec{J} = -\pi\frac{\mu_0 c}{d}\left(e^{-dr^2}-1\right) = \pi\frac{\mu_0 c}{d}\left(1-e^{-dr^2}\right) \quad (1)$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \ldots = B\,2\pi r \quad (2)$$

$$(1)\wedge(2) \rightarrow B = \frac{c\mu_0}{2d}\frac{1}{r}\left(1-e^{-dr^2}\right)$$

Στο σημείο A που απέχει απόσταση $r\le b$ είναι: $\vec{B} = \frac{c\mu_0}{2d}\frac{1}{r}\left(1-e^{-2dr^2}\right)\hat{\varphi}$

-||-   B   -||-   -||- $r\geq b$ -||- $\vec{B} = \frac{c\mu_0}{2d}\frac{1}{r}\left(1-e^{-2db^2}\right)\hat{\varphi}$

Στην 2η περίπτωση

$$\iint_S \mu_0\vec{J}\cdot\hat{n}\,dS = \mu_0\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\int_{r'=0}^{r} r' a\left(1-\frac{r'^2}{b^2}\right)dr' = 2\pi\mu_0 a\left(\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}\frac{r^4}{b^2}\right) \rightarrow \vec{B} = \mu_0 a\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{3}\frac{r^3}{b^2}\right)\hat{\varphi}$$ για $r\le b$

Για $r\geq b$ $\quad 2\pi r B = 2\pi\mu_0 a\int_0^b r\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)dr = 2\pi\mu_0 a\left(\frac{b^2}{2}-\frac{b^4}{4b^2}\right) = 2\pi\mu_0 a\frac{b^2}{2} = \pi\mu_0 a b^2 \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}ab^2\frac{1}{r}\hat{\varphi}$$

27/3 Μάθημα 7º

Εξισώσεις Maxwell → ΗΜ αλληλεπίδραση $10^{-14}\,cm \le r \le 10^{7}\,cm$, $|e| \simeq 1.6\cdot 10^{-19}\,C$ → φορτία είναι κβαντισμένα

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ (ούτε καταστρέφεται ούτε δημιουργείται)

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ 3. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

2. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ 4. $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$

$\rho(\vec{r},t)$, $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho\vec{v}$ → $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\rho(\vec{r},t)\\ \vec{J}(\vec{r},t)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)\end{array} \rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

: Δύναμη Lorentz
Δύναμη που ασκείται σε κινούμενο φορτίο

Αν οι εξισώσεις του Maxwell ήταν συμμετρικές

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0\rho_m$, ρ_m: πυκνότητα μαγνητικού φορτίου

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_0\vec{J}_m$, $\vec{J}_m$: πυκνότητα ρεύματος μαγνητικού μονοπόλου

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) + m\left(\vec{B} - \dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)$: Δύναμη Lorentz

Σύμφωνα με τα σύγχρονα πειραματικά δεδομένα → $\rho_m = J_m = 0$

1. Διατήρηση φορτίου

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0 \Rightarrow$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$, αν $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} > 0$ → φορτίο βγαίνει από επιφάνεια, τότε $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} < 0$ →

Διατήρηση φορτίου   πυκνότητα φορτίου μειώνεται

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV + \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = 0 \Rightarrow \underbrace{\oint \vec{J}\cdot\hat{n}\,dS}_{\text{ροή φορτίου προς τα έξω από επιφάνεια}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV}_{\text{μεταβολή φορτίου μέσα σε όγκο}} = 0$$

2. Ύπαρξη ΗΜ κυμάτων

(Θα την δείξουμε στο κενό, δηλ. $\rho(\vec{r},t) = 0$ κ $\vec{J}(\vec{r},t) = 0$)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$, έχουμε:

$\vec{\nabla}\cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}^{0} - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}$: κυματική εξίσωση

Ταλαντώνεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

Ομοίως $\vec{\nabla}^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \vec{E},\vec{B}$: διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός

όταν μειώνεται το ένα, αυξάνεται το άλλο

Άσκηση

Για $\rho\neq 0$, $\vec{J}\neq 0$ νδο $\vec{\nabla}^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho$ κ $\vec{\nabla}^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{J}$

3. Σύζευξη $\vec{E},\vec{B}$

$\rho, \vec{J}, \vec{E}, \vec{B}$: ανεξάρτητα χρόνου

$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho_0/\varepsilon_0\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=0\end{array}\right\}$ Ηλεκτροστατικό πεδίο $\qquad \left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\end{array}\right\}$ Μαγνητοστατικό πεδίο

28/3 Μάθημα 8º

Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου (Σημειώσεις από Τάσο)

$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})$: δύναμη που δέχεται κινούμενο φορτίο μέσα σε ηλεκτρικό-μαγνητικό πεδίο

$\left.\begin{array}{l}dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}\\ P=\frac{dW}{dt}\end{array}\right\} \Rightarrow P=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow P=\vec{F}\cdot\vec{u} \Rightarrow P=q(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B})\cdot\vec{u} = q\vec{E}\cdot\vec{u} + \cancel{q(\vec{u}\times\vec{B})\cdot\vec{u}}^{0} \Rightarrow P=q\vec{E}\cdot\vec{u}$ ✓

Ισχύει: $P=V\vec{J}\cdot\vec{E}$ ✓

Απόδειξη

($P=\sum_i N_i q_i\vec{E}\cdot\vec{u}_i = \vec{E}\cdot\sum_i N_i q_i\vec{u}_i = V\vec{E}\cdot\sum_i\frac{N_i}{V}q_i\vec{u}_i = V\vec{E}\cdot\sum_i n_i q_i\vec{u}_i = V\vec{E}\cdot\vec{J}$ δεν χρειάζεται να τη θυμάμαι)

Ισχύς ανά μονάδα όγκου $\frac{P}{V}=\vec{J}\cdot\vec{E}$ δηλ. ενέργεια ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα όγκου

Είναι: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Άρα $\frac{P}{V} = \vec{J}\cdot\vec{E} = \vec{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Ταυτότητα: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

Επομένως $\frac{P}{V} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$

$\frac{P}{V} = -\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{J}\cdot\vec{E}$

Ορίζουμε την ενεργειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού πεδίου : $U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2$

-||- -||- μαγνητικού -||- : $U_B = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2$

-||- -||- ηλεκτρομαγνητικού πεδίου: $U = U_E + U_B$

Ορίζουμε το διάνυσμα Poynting : $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$, τότε

$\frac{\partial U_E}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(|\vec{E}|^2) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\frac{\partial U_B}{\partial t} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Προκύπτει : $\boxed{\vec{J}\cdot\vec{E} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0}$ Μια μορφή διατήρησης ενέργειας

$P = \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$: μηχανική ισχύς

$P_{em} = \frac{d}{dt}\iiint_V \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)dV = \frac{d}{dt}\iiint_V U\,dV$: ηλεκτρομαγνητική ισχύς

$\frac{dW_S}{dt} = -\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dV = -\oiint_S \vec{S}\cdot\hat{n}\,dS$

Η ισχύς των σωματιδίων μοιράζεται στην ισχύ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και ένα μέρος διαχέεται ως ροή έξω από το πεδίο. Αν συνδυάσουμε τις παραπάνω σχέσεις:

$\frac{d}{dt}\iiint_V (U_{mech} + U_{em})\,dV = -\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dV \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(U_{mech} + U_{em}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \rightarrow$ ΑΔΕ (προκύπτει η ίδια σχέση)

$dU_{mech} = \vec{E}\cdot\vec{J}\,dt$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Rightarrow$ (ταυτότητα)

$\vec{\nabla}(\overset{0}{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow -\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$ ή $\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

(τα παραπάνω ισχύουν για $\rho=0$ και $\vec{J}=0$)

Ομοίως αποδεικνύεται $\nabla^2\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

προηγούμενο μάθημα

3/4 Μάθημα 9º (πρέπει να λείπει ένα μάθημα)

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ επειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$

$\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$

A. Αξονικές βαθμίδες

i. $\phi' = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\partial\chi}{\partial t}$ $\qquad A_3' = 0 \rightarrow A_3 = \frac{\partial\chi}{\partial x_3}$

ii. $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi = (A_1 + \frac{\partial\chi}{\partial x_1})\hat{i} + (A_2 + \frac{\partial\chi}{\partial x_2})\hat{j} + (A_3 + \frac{\partial\chi}{\partial x_3})\hat{k}$ (μπορούμε να μηδενίσουμε οποιαδήποτε από τις συνιστώσες του $\vec{A}'$)

B. Βαθμίδες που σχετίζονται με $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\chi$

i. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0 \Rightarrow \nabla^2\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (βαθμίδα Coulomb)

ii. Επιλέγουμε $\nabla^2\chi$, έτσι ώστε $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0$ (βαθμίδα Lorentz)

Η διαφορική εξίσωση της βαθμίδας Lorentz γίνεται: $\nabla^2\vec{A}' = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}'}{\partial t^2} - \mu_0\vec{J}$ (1) και

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi' &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}') - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' &= -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi'}{\partial t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2\phi' = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

(1), (2) δεν είναι πια πεπλεγμένες όπως είναι στη γενική περίπτωση

$X, \vec{A}, \phi = f(\vec{r}, t)$

Στο κενό $(\rho = 0 \ , \ \vec{J} = 0)$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla}^2 \phi = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$\vec{A}, \phi$: ανεξάρτητα χρόνου

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \ , \quad \vec{\nabla}^2 \phi = -\rho/\varepsilon_0 \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Αποδεικνύεται στη βαθμίδα Lorentz ότι $\vec{\nabla}^2 X = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}$

Εφαρμογές

$\vec{B} = B_0 \hat{k} \rightarrow$ ποια διανυσματικά δυναμικά το αναπαράγουν;

i. $\vec{A} = x B_0 \hat{j}$ γιατί $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & xB_0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left[0 - \frac{\partial}{\partial z}(xB_0)\right] - \hat{j}(0-0) + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xB_0) - 0\right] = B_0 \hat{k}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0 \qquad (\vec{A}' = x B_0 \hat{j} + \vec{\nabla} X)$$

ii. $\vec{A} = -y B_0 \hat{i}$

iii. $\vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (\hat{k} \times \vec{r})$

iv. $\vec{A}' = \vec{A} + a\vec{r}$ όπου $\vec{A}$ μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις

iii. Πρέπει $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\hat{k} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\hat{i} + x\hat{j} \rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} B_0 (-y\hat{i} + x\hat{j})$$

$$\vec{\nabla} \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(0 - \frac{\partial x}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(0 + \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2\hat{k}$$

Άρα $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} B_0 \vec{\nabla} \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) = \frac{1}{2} B_0 2\hat{k} = B_0 \hat{k} = \vec{B}$

Άσκηση

$\vec{A}' = \vec{A} + a\vec{r}$

$\vec{B} = \vec{B_0}$ νδο $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B_0} \times \vec{r} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B_0}$

$\vec{A}' = \frac{1}{2} \vec{B_0} \times (\vec{r} - \vec{r_0}) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B_0}$ με $\vec{r_0} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ σταθ. διάνυσμα

ΝΔΟ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} X \rightarrow ?$

24/4 Μάθημα 10ο $(\vec{\nabla} \equiv \nabla)$

$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ $\quad\quad$ $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla X$

$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\quad \phi' = \phi - \frac{\partial X}{\partial t}$: $\vec{A}, \phi$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα

πχ. $\vec{A} = A_0 \cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{j}$, με $\omega = kc$ και A_0: con. (c: ταχ. φωτός $= 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$)

Αν ικανοποιείται η βαθμίδα Lorentz $\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, τότε:

a. Να βρεθεί το $\phi = \phi(x_3, t)$

b. Να βρεθούν τα $\vec{E}, \vec{B}$

c. Ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Maxwell

a. $\nabla\cdot\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\partial A_1}{\partial x_1}}^{0} + \cancel{\frac{\partial A_2}{\partial x_2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial A_3}{\partial x_3}}^{0} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \phi$: ανεξάρτητο χρόνου

$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0$, γιατί το $\vec{A}$ δεν έχει συνιστώσες A_1 και A_3

$\frac{\partial A_2}{\partial x_2} = 0$, γιατί A_2 δεν έχει εξάρτηση από x_2

Διαλέγουμε $\phi = Cx_3$

b. $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -C\hat{k} - A_0(-\omega)[-\sin(kx_3-\omega t)]\,\hat{j} = -C\hat{k} - A_0\omega\sin(kx_3 - \omega t)\,\hat{j}$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & A_2 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(0 - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - 0\right) = -A_0 k[-\sin(kx_3 - \omega t)]\,\hat{i} =$$
$$= A_0 k \sin(kx_3 - \omega t)\,\hat{i}$$

c. 1. $\nabla\cdot\vec{E} = \cancel{\frac{\partial E_1}{\partial x_1}}^{0} + \cancel{\frac{\partial E_2}{\partial x_2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial E_3}{\partial x_3}}^{0} = 0$

$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} = 0$, γιατί $\vec{E}$ δεν έχει E_1 συνιστώσα , $\frac{\partial E_2}{\partial x_2} = \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0$, γιατί δεν εξαρτώνται από x_2 και x_3 αντίστοιχα

$$2.\ \nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\cancel{\frac{\partial E_3}{\partial x_2}}^{0} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) - \hat{j}\left(\cancel{\frac{\partial E_3}{\partial x_1}}^{0} - 0\right) + \hat{k}\left(\cancel{\frac{\partial E_2}{\partial x_1}}^{0} - 0\right) = -[-A_0\omega k\cos(kx_3 - \omega t)]\,\hat{i} =$$
$$= A_0 k \cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{i}$$

Όμως $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -A_0\omega k\cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{i}$ $\Bigg\} \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

3. $\nabla\cdot\vec{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$

4. $\nabla\times\vec{B} = \ldots = A_0 k^2\cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{j} = A_0\frac{\omega^2}{c^2}\cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{j} = \varepsilon_0\mu_0\,\underbrace{A_0\omega^2\cos(kx_3 - \omega t)\,\hat{j}}\, = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\hat{e}_\rho = \hat{\rho}\ ,\ \hat{e}_\varphi = \hat{\varphi}\ ,\ \hat{e}_z = \hat{z} = \hat{k}.$$

πχ. $\vec{A} = A(\rho)\hat{k}$, νδο $\vec{A}' = -z\dfrac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_\rho$ δημιουργεί ίδιο $\vec{B}$, δηλ. $\vec{A}\to\vec{B}$, $\vec{A}'\to\vec{B}' \Rightarrow \vec{B}'=\vec{B}$

Να βρεθεί η $X(\vec{r},t)$

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \cancel{A_z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial \cancel{A_\varphi}}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial \cancel{A_\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\cancel{\rho A_\varphi}) - \frac{\partial \cancel{A_\rho}}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_z = -\frac{\partial A_z(\rho)}{\partial\rho}\hat{e}_\varphi = \vec{B}$$

φορμαλισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{A}' = \vec{A}'(\rho) = -z\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\hat{\rho} \to \nabla\times\vec{A}' = \ldots = \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\hat{\varphi} = -\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\hat{\varphi} = \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla X \Rightarrow \nabla X = \vec{A}' - \vec{A} \Rightarrow \nabla X = -z\frac{\partial A}{\partial\rho}\hat{\rho} - A\hat{k} \quad (1)$$

$\nabla X = \dfrac{\partial X}{\partial\rho}\hat{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial X}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \dfrac{\partial X}{\partial z}\hat{k}$ (2) , κλίση βαθμωτής συνάρτησης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

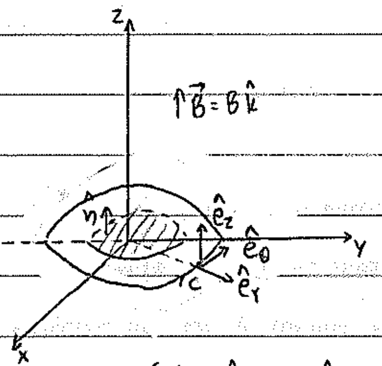
(1)∧(2) $\to$ $\dfrac{\partial X}{\partial\rho} = -z\dfrac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}$, $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial X}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial X}{\partial\varphi} = 0 \to X$: ανεξάρτητο φ , $\dfrac{\partial X}{\partial z} = -A(\rho) \to X = X(\rho,z) = -A(\rho)z + f(\rho)$

$$\frac{\partial X(\rho,z)}{\partial\rho} = -z\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho} \Rightarrow -z\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho} + \frac{df(\rho)}{d\rho} = -z\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho} \Rightarrow \frac{df}{d\rho} = 0 \Rightarrow f: \text{con.}$$

$X(\rho,z) = -zA(\rho) + \text{con.}$: συνάρτηση βαθμίδας

27/4 Μάθημα 11º (Σημειώσεις από Τάσο)

Φαινόμενο Bohm - Aharonov



$$\vec{B} = \begin{cases} B\hat{k}, & r<r_0 \\ 0, & r>r_0 \end{cases}$$ ⇝ έχουμε δηλ. $\vec{B}$ μόνο μέσα στην επιφάνεια, παντού έξω από αυτήν είναι μηδέν και ψάχνουμε το $\vec{A}$

Επιλέγουμε μια κλειστή καμπύλη c και παίρνουμε την εξής σχέση:

$$\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,dS \Rightarrow \oint_c \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS \Rightarrow$$

$$\oint_c (A_r\hat{e}_r + A_\theta\hat{e}_\theta + A_z\hat{e}_z)\cdot d\vec{r} = \iint_S B\hat{k}\cdot\hat{k}\,dS \Rightarrow \oint_c (A_r\hat{e}_r + A_\theta\hat{e}_\theta + A_z\hat{e}_z)\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}ds = B\iint d\sigma$$

έγινε από $S\to\sigma$ για να μην $\exists$ σύγχυση

$\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} = \hat{e}_\theta$, επομένως $\oint_c A_\theta ds = B\iint d\sigma \Rightarrow A_\theta\oint_c ds = B\iint_S d\sigma$

Το $\vec{B}$ δεν ορίζεται παντού, επομένως πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Για $r \le r_0$: $\vec{B} = B\hat{z}$ και $A_\theta 2\pi r = B\pi r^2 \Rightarrow A_\theta = \frac{1}{2}Br$ $\left(\vec{A} = \frac{1}{2}Br\,\hat{e}_\theta\right)$

ii) Για $r > r_0$: $A_\theta 2\pi r = B\pi r_0^2 \Rightarrow A_\theta = \frac{1}{2}Br_0^2 \cdot \frac{1}{r}$

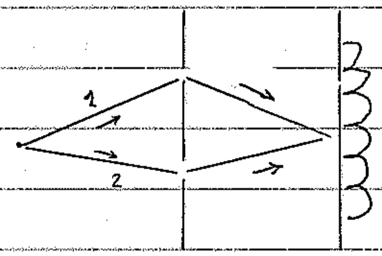
Τελικά έχουμε: $A_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2}Br, & r \le r_0 \\ \frac{1}{2}B\frac{r_0^2}{r}, & r > r_0 \end{cases}$

Παρατήρηση: Παρόλο που δεν υπάρχει $\vec{B}$ κάπου, υπάρχει $\vec{A}$!!!

Η σημαντικότητα του φαινομένου φαίνεται στην κβαντομηχανική

Πείραμα 2 οπών

Προσθέτουμε $\vec{B}$ στο πείραμα, επομένως η $\Psi(\vec{r})$ που περιγράφει την κυματοσυνάρτηση του e^- θα μετατοπιστεί κατά μία φάση, $\tilde{\Psi} = \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\int_P \vec{A}\cdot d\vec{r}\right)$



Διαδρομή 1: $\Phi\text{άση}1 = \exp\left(ie/\hbar c \int_{P_1} \vec{A}\cdot d\vec{r}\right)$

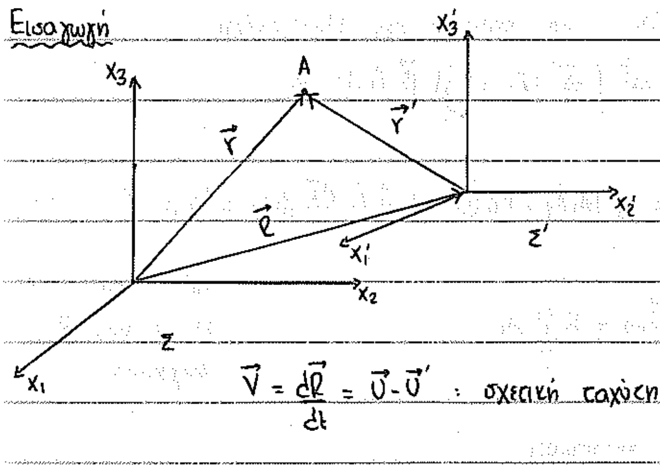
$\Phi\text{άση}2 = \exp\left(ie/\hbar c \int_{P_2} \vec{A}\cdot d\vec{r}\right)$

Δηλαδή, $\delta\varphi = ie/\hbar c \oint_P \vec{A}\cdot d\vec{r}$: προστίθεται ένας όρος στη φάση της κάθε διαδρομής και τελικά βλέπουμε άλλη εικόνα συμβολής (αφού $\delta\varphi \ne 0$)

Από εδώ και κάτω, σχεδόν αποκλειστικά από σημειώσεις Τάσου

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Εισαγωγή



Έχουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς Σ και Σ', όπου το Σ' κινείται ως προς το Σ στον άξονα X_3. Για το διάνυσμα θέσης ενός σημείου A στα δύο συστήματα αναφοράς, ισχύει:

$\vec{r} = \vec{\ell} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{\ell} = \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}'}{dt} \Rightarrow$

$\vec{V} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{v} - \vec{v}'$: σχετική ταχύτητα (σταθ.)

Αφού $\vec{V} = V\hat{x}_3$, τότε: $V = \frac{dx_3}{dt} - \frac{dx_3'}{dt} \Rightarrow V dt = d(x_3 - x_3') \Rightarrow x_3 - x_3' = Vt \Rightarrow x_3' = x_3 - Vt$

$x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3 - Vt$, $t' = t$: Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Newtonian Mechanics: $m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, t)$

Στο άλλο Σ.Α θα είναι: $m_i \frac{d^2\vec{r}_i'}{dt'^2} = \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i' - \vec{r}_j', t')$, όπου $t' = t$ και $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_i' - \vec{r}_j'$

Το παραπάνω ισχύει επειδή το Σ' κινείται ως προς το Σ με σταθ. ταχύτητα και ισχύει: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$

Αν υπήρχε και επιτάχυνση α: στη, τότε θα είχαμε: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t - \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, τότε ο νόμος του Newton θα γινόταν: $m_i \frac{d^2\vec{r}_i'}{dt^2} = -m_i\vec{a} + \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}(\vec{r}_i' - \vec{r}_j', t)$

Δηλαδή, εμφανίζεται μια νέα δύναμη, η $-m_i\vec{a}$, η οποία υπάρχει μόνο στην κίνηση του Σ'

Αν έρθουμε τώρα στον ΗΜ (έστω $\phi = \phi'$)

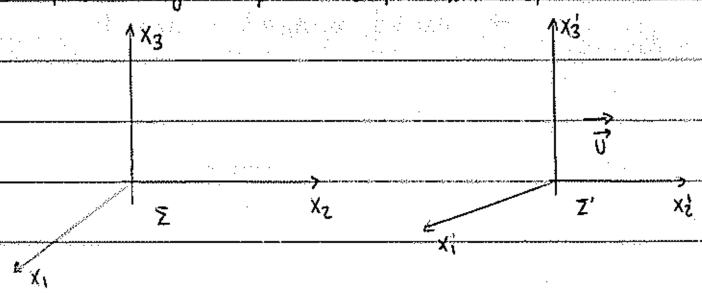
$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, όπου $\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, t)$

Στο αδρανειακό σύστημα Σ': $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3'^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + \frac{2V}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t'^2} = 0$

Εμφανίζονται όροι που χαλάνε τη συμμετρία.
Αυτοί οι όροι δεν θα υπήρχαν, αν αντί για τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, εφαρμόζαμε τους μετασχηματισμούς Lorentz, οι οποίοι είναι:

$x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}(x_3 - Vt)$, $t' = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\left(t - \frac{V}{c}x_3\right)$

Πως όμως οδηγηθήκαμε στους μετασχηματισμούς Lorentz?



Έστω τα Σ και Σ' όπου για $t = t' = 0$ συμπίπτουν

Στο Σ ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = 0$ $(r = ct)$

Στο Σ' ισχύει: $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - c^2t'^2 = 0$

Θεωρούμε την ποσότητα $ds^2 = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ και την $ds'^2 = c^2t'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$ ✓

Σύμφωνα με το αξίωμα της σχετικότητας: $ds^2 = ds'^2$ (ισχύει αξιωματικά) ✓

Συμβολίζουμε δύο διανύσματα στους χώρους Σ και Σ':

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \checkmark \quad \text{και} \quad |x'\rangle = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } x_0 = ct \text{ και } x_0' = ct'$$

Είναι: $ds^2 = ds'^2 \Rightarrow \langle x|g|x\rangle = \langle x'|g|x'\rangle$: σταθ., g: μετρικός τανυστής του χώρου Minkowski

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{επομένως} \quad \langle x'|g|x'\rangle = (x_0' \; x_1' \; x_2' \; x_3') \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

(από πολ/σμό πινάκων, προφανώς θα βγαίνει το $x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$)

L: $|x'\rangle = \Lambda |x\rangle$ ✓ $\Rightarrow \langle x'| = \langle x|\Lambda^T$

Πρέπει να βρούμε τον Λ, επομένως:

$$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow \langle x|g|x\rangle = \langle x'|g|x'\rangle \Rightarrow \langle x|g|x\rangle = \underbrace{\langle x|\Lambda^T}_{\langle x'|} g \underbrace{\Lambda|x\rangle}_{|x'\rangle} \Rightarrow \underbrace{\Lambda^T g \Lambda = g \text{ και } g = \Lambda g \Lambda^T \text{ και } g = g^{-1}}_{\text{ισχύουν}}$$

Αποδεικνύεται ότι: $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$

Αν έχουμε 2 μετασχηματισμούς Λ, Λ' πρέπει το γινόμενό τους να είναι πάλι μετασχηματισμός, δηλ.

$(\Lambda\Lambda')^T g (\Lambda\Lambda') = g$ ✓

Επίσης:
$$\left.\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= g \\ \Lambda g \Lambda^T &= g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{|\Lambda|^2}_{\text{ορίζουσα}} = 1 \;\Rightarrow\; |\Lambda| = 1 \text{ ή } |\Lambda| = -1$$

Επίσης:
$$\left.\begin{aligned} (\Lambda^T g \Lambda)_{00} &= g_{00} = 1, \quad \text{δηλ. } \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{20}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1 \\ (\Lambda g \Lambda^T)_{00} &= g_{00} = 1, \quad \text{δηλ. } \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{01}^2 - \Lambda_{02}^2 - \Lambda_{03}^2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Lambda_{00}^2 \geq 1 \Rightarrow \Lambda_{00} \geq 1 \text{ ή } \Lambda_{00} \leq -1$$

Έχουμε λοιπόν 4 δυνατές επιλογές

i. $|\Lambda| = 1$ και $\Lambda_{00} \geq 1 \rightarrow L_+^+$

ii. $|\Lambda| = 1$ και $\Lambda_{00} \leq -1 \rightarrow L_+^-$

iii. $|\Lambda| = -1$ και $\Lambda_{00} \geq 1 \rightarrow L_-^+$

iv. $|\Lambda| = -1$ και $\Lambda_{00} \leq -1 \rightarrow L_-^-$

Ισχύουν: $L_-^+ = g\, L_+^+$, $L_+^- = -L_+^+$, $L_-^- = -g\, L_+^+$

Θα κάνουμε την i. περίπτωση (το Σ' κινείται μόνο στον x_3)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & 0 & 0 & \Lambda_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Lambda_{30} & 0 & 0 & \Lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Αν αντικαταστήσουμε στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1$ (1), $\Lambda_{03}^2 - \Lambda_{33}^2 = -1$ (2), $\Lambda_{03}\Lambda_{00} - \Lambda_{30}\Lambda_{33} = 0$ (3)

Αφού είμαστε στην i. περίπτωση $\Lambda_{00} \geq 1$

Επιλέγουμε αυθαίρετα $\Lambda_{00} = \cosh\xi = \frac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi})$, τότε:

(1)$\rightarrow \Lambda_{00}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1 \Rightarrow \Lambda_{30}^2 = -1 + \Lambda_{00}^2 \Rightarrow \Lambda_{30}^2 = \cos^2 h\xi - 1 \Rightarrow \Lambda_{30}^2 = \frac{1}{4}(e^{2\xi} - 2 + e^{-2\xi}) \Rightarrow \Lambda_{30} = \sinh\xi = \frac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi})$

Ενώ, $\Lambda_{03} \overset{(3)}{=} \dfrac{\Lambda_{30}\Lambda_{33}}{\Lambda_{00}} \Rightarrow \Lambda_{03} = \tanh\xi\, \Lambda_{33}$

Άρα η (2) γίνεται: $\tanh^2\xi\, \Lambda_{33}^2 - \Lambda_{33}^2 = -1 \Rightarrow \Lambda_{33}^2 = -\dfrac{1}{\tanh^2\xi - 1} \Rightarrow \Lambda_{33}^2 = \dfrac{1}{1 - \tanh^2\xi} \Rightarrow \Lambda_{33} = \pm\cosh\xi \rightarrow \Lambda_{03} = \pm\sinh\xi$

Επειδή όμως $|\Lambda| = 1 \Rightarrow \Lambda_{33} = \cosh\xi$ και $\Lambda_{03} = \sinh\xi$, άρα

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\xi & 0 & 0 & \sinh\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\xi & 0 & 0 & \cosh\xi \end{pmatrix}$$

, όμως τη χρον. στιγμή $t = t' = 0$ τα Σ και Σ' συμπίπτουν, επομένως

$x_1' = x_2' = x_3' = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = vt$

Είναι: $|x'\rangle = \Lambda|x\rangle \Rightarrow x_3' = \sinh\xi\, x_0 + \cosh\xi\, x_3 \Rightarrow$

$0 = \sinh\xi\, x_0 + \cosh\xi\, x_3 \Rightarrow \dfrac{x_3}{x_0} = -\tanh\xi \Rightarrow \dfrac{vt}{ct} = -\tanh\xi \Rightarrow$

$\tanh\xi = -\underbrace{\left(\dfrac{v}{c}\right)}_{\beta}$, $\dfrac{1}{\cosh^2\xi} = \underbrace{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}_{\gamma^{-2}}$, ~~αφού~~ $\cancel{\dfrac{1}{\cosh^2\xi} \leq 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{v^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow}$

$\Lambda_{00} = \cosh\xi = \left(\dfrac{1}{1 - \tanh^2\xi}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{1/2} = \gamma$ και επειδή: $\cosh\xi > 0 \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} > 0 \Rightarrow$

$\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1} > 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{v^2}{c^2} > 0 \Rightarrow \dfrac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow v < c$

Τελικά βρίσκουμε το Λ χωρίς αυθαιρεσία:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - \beta x_3) \\ x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= \gamma(-\beta x_0 + x_3) \end{aligned}$$

"Μοντέρνος" τρόπος για να βρίσκουμε τους μετασχηματισμούς Lorentz

Αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{δηλ.} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= \gamma(x_0' + \beta x_3') \\ x_1 &= x_1' \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= \gamma(v x_0' + x_3') \end{aligned}$$

Ισχύουν οι μετασχηματισμοί Lorentz και όχι Γαλιλαίου, επειδή η ταχ. έχει άνω όριο την c και δεν είναι άπειρη

11/5 (Δεν έχω ιδέα ποιο μάθημα είναι)

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_3\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x_3'\right)$$

$$x_3' = \gamma(x_3 - vt) \qquad x_3 = \gamma(x_3' + vt')$$

$$x_1' = x_1 \qquad x_1 = x_1'$$

$$x_2' = x_2 \qquad x_2 = x_2'$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Νόμος μετασχηματισμού ταχυτήτων

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ (\Sigma), \quad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \ (\Sigma')$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{u}_3' + \vec{V}}{1 + \frac{\vec{u}_3' \cdot \vec{V}}{c^2}}, \quad \vec{u}_1 = \frac{\vec{u}_1' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{\vec{u}_3' \cdot \vec{V}}{c^2}}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{u}_2' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{\vec{u}_3' \cdot \vec{V}}{c^2}}$$

$\vec{V}$: σχετική ταχύτητα

$\vec{V} = v\hat{k}$

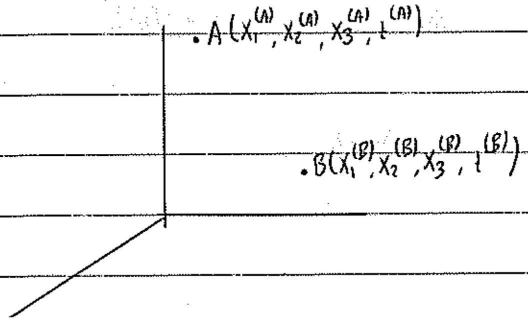
$\vec{u}' = u_1'\hat{i} + u_2'\hat{j} + u_3'\hat{k}$

Αν $\vec{u}_1' = \vec{u}_2' = 0$, τότε ... (πράξεις) → $\vec{u}_3 = \dfrac{\vec{u}_3' + \vec{V}}{1+\frac{\vec{u}_3'\cdot\vec{V}}{c^2}} \Rightarrow \vec{u}_3 = \vec{c} = \vec{u}_3'$ (αν $\vec{u}_3' = c\hat{k}$)

Γεγονός = κάτι $(\vec{x}, t)$

$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, t^{(1)})$ → 1ο γεγονός

$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, t^{(2)})$ → 2ο γεγονός



$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{3} (x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 \\ \\ \Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}\end{array}\right\}$$ ανεξάρτητα στους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου

↓

Ποσότητα ανεξάρτητη από σύστημα συντεταγμένων

Relativity

$-\sum_{i=1}^{3} (\Delta x_i)^2 + c^2 \Delta t^2$, $\Delta x_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)}$, $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)}$

↓

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΗ → σύνδεση χώρου-χρόνου

Ταυτόχρονο → $\Delta t = 0$

Σχετικότητα άρει την έννοια του ταυτόχρονου

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x_3) \\ \text{Αν } \Delta t = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x_3$$ (αν στο δικό μου Σ.Α δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα, στο κινούμενο Σ', χρονική μεταβολή τους, εξαρτάται από την απόσταση τους στο δικό μου Σ)

πχ. fucking muons (15η φορά που το ακούω στη σχολή)

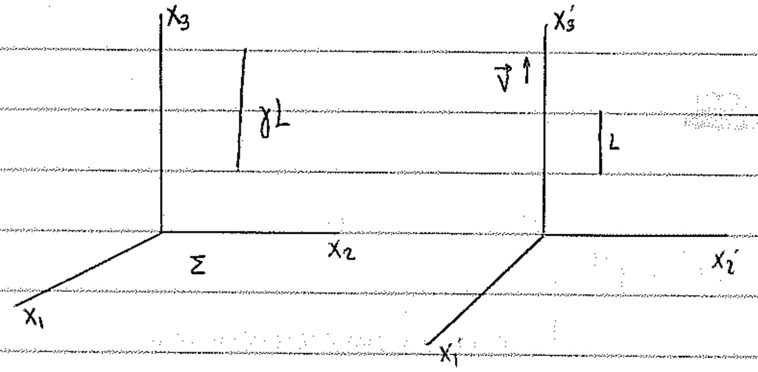
Στο ακίνητο Σ: $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x_3'^{\nearrow 0})$ (είναι το δικό μας Σ στη Γη)

Στο κινούμενο Σ': $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x_3)$, $\Delta x_3' = 0$ (ίδιο σημείο δύο γεγονότα) (είναι το Σ' των μιονίων)

Άρα $\Delta t = \gamma \Delta t'$ ($\Delta t \gg \Delta t'$) (στο δικό μας Σ ο χρόνος κυλάει πιο αργά)

Για $\Delta t' \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}\,s \rightarrow x' = c\Delta t' \simeq 0.66$ km

$\Delta t = \gamma \Delta t \simeq 2.6 \cdot 10^{-4}\,s \rightarrow x = c\Delta t = c\gamma\Delta t' \simeq 47$ km



$-(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2$

$-(\Delta s')^2 = -c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2$

$\Delta s = \Delta s'$

Απόδειξη: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_1' = \Delta x_2' = 0$

Άρα $-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x_3)^2 = -c^2\cancel{(\Delta t')^2}^{\,0} + (\Delta x_3')^2$

Είναι: $\Delta t' = 0$, $\Delta x_3' = L$

$\cancel{\Delta t'}^{\,0} = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x_3\right) \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{c^2}{v}\Delta t$ ή $\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x_3$

Άρα $-\cancel{c^2}\frac{v^2}{c^{4}}(\Delta x_3)^2 + (\Delta x_3)^2 = L^2 \Rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\Delta x_3)^2 = L^2 \Rightarrow \Delta x_3 = \gamma L$

Τετραδιανύσματα

Θεωρούμε τα γεγονότα ως τετραδιανύσματα

$(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ στο Σ, $(x_0',\ x_1',\ x_2',\ x_3')$ στο Σ'

Ισχύει: $x'_\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \Lambda_{\underset{\text{γραμμή}}{\nu}}{}^{\overset{\text{στήλη}}{\mu}} x_\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x_\mu$ (συμβολισμός Einstein, $\Lambda_\nu{}^\mu$: πίνακας Lorentz)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Για να μετασχηματίσω από ανταλλοίωτες σε συναλλοίωτες

$x^\nu = g^{\nu\nu} x_\nu$, $g^{\nu\nu}$: μετρικός τανυστής

πχ. $x^0 = g^{00}x_0 + g^{01}x_1 + g^{02}x_2 + g^{03}x_3 = x_0$

$x^2 = g^{20}x_0 + g^{21}x_1 + g^{22}x_2 + g^{23}x_3 = -x_2$ κοκ.

Ιδιότητα: $x^\nu x_\nu = (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)(x_0,\ +x_1,\ +x_2,\ +x_3) = (x_0,\ -x_1,\ -x_2,\ -x_3)(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) =$

$= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$: αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς Lorentz

πρέπει να την ικανοποιούν όλα τα τετραδιανύσματα

$x^\nu x_\nu = x'^\nu x'_\nu$: βαθμωτό μέγεθος

$A^\nu A_\nu = \text{con.} \Rightarrow A^\nu A_\nu = A'^\nu A'_\nu$

$x'_\nu = \Lambda^\sigma{}_\nu x_\sigma$, $x'^\nu = L^\nu{}_\rho x^\rho$, L: αντίστροφος του Λ *

$\Lambda^\sigma{}_\nu$: στοιχεία του πίνακα Λ

$x'^\nu x'_\nu = \underbrace{L^\nu{}_\rho x^\rho \Lambda^\sigma{}_\nu}_{\text{αριθμοί}} x_\sigma = x^\rho L^\nu{}_\rho \Lambda^\sigma{}_\nu x_\sigma = x^\rho \delta_\rho{}^\sigma x_\sigma = x^\nu x_\nu$

επιβιώναν μόνο οι όροι που έχουν ίδιους δείκτες (διαγώνιοι όροι)

$L^\nu{}_\rho \Lambda^\sigma{}_\nu = \delta_\rho^\sigma = \begin{cases} 1 , & \rho = \sigma \\ 0 , & \rho \neq \sigma \end{cases}$ → το απαιτούμε

* $L = \Lambda^{-1} \Rightarrow L_\rho{}^\nu = (\Lambda^{-1})_\rho{}^\nu$

$A^\nu = g^{\nu\nu} A_\nu$

$A'^\nu = L^\nu{}_\nu A^\nu$, $A'_\nu = L_\nu{}^\nu A_\nu$

$A^\nu B_\nu = A_\nu B^\nu$: αναλλοίωτη ποσότητα $\Rightarrow A'^\nu B'_\nu = A'_\nu B'^\nu$

Για τα A^0, A^1, A^2, A^3 και A'^0, A'^1, A'^2, A'^3 ισχύουν:

$A^0 = \dfrac{A'^0 + v/c\, A'^1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$, $A^1 = \dfrac{A'^1 + v/c\, A'^0}{(1-\beta^2)^{1/2}}$, $A^2 = A'^2$, $A^3 = A'^3$ (κίνηση στον x-άξονα)

Ορίζουμε: $(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$: αναλλοίωτη ποσότητα

$A^0 = +A_0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$

Εν γένει: $A^i = (A^0, \vec{A})$ και $A^i A_i = (A^0)^2 - \vec{A}^2$, $\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{A}^2$ ✓

Ορίζουμε: $\partial^\nu \phi \rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial x^\nu}$, $\partial^\nu \phi = \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x^0}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x^1}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x^3} \right)$ ✓ δείκτες κάτω;

$\partial'^\nu = \dfrac{\partial}{\partial x'^\nu} = \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'^\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\nu \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ (πρόχειρη απόδειξη: $x'_\nu = \Lambda_\nu{}^\nu x_\nu \Rightarrow x_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\nu x'_\nu \Rightarrow \dfrac{\partial x_\nu}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\nu$)

$\left.\begin{array}{l} \partial'^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\nu \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \\ x'^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\nu x^\nu \end{array}\right\}$: μετασχηματισμός τετραδιανύσματος

το διαφορικό μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο, άρα είναι τετραδιάνυσμα

Άρα ∂^ν : τετραδιάνυσμα → $\partial^\nu \partial_\nu$: const ? και $\partial^\nu A_\nu = \dfrac{\partial A_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_3}$: const

$\partial^\nu A_\nu = \partial'^\nu A'_\nu$

ΤΑΝΥΣΤΕΣ $2^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

$F_{\mu\nu} \rightarrow$ πίνακας 4x4 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Μετασχηματισμός του $F_{\mu\nu}$

$F'_{\mu\nu} = \Lambda^{\lambda}_{\mu} \Lambda^{\rho}_{\nu} F_{\lambda\rho}$ ✓ (ο κάθε Λ μετασχηματίζει τις αντίστοιχο συνιστώσες)

$F'^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\lambda} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\rho} F^{\lambda\rho}$ (ανταλλοίωτες συνιστώσες)

πχ. $F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{a} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\gamma}_{\mu} \Lambda^{\delta}_{\nu} F^{a\beta} F_{\gamma\delta}$

Όμως $(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\delta}_{\nu} = \delta_{\beta}^{\delta}$

$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{a} \Lambda^{\gamma}_{\mu} = \delta_{a}^{\gamma}$

$F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \delta_{\beta}^{\delta} \delta_{a}^{\gamma} F_{\gamma\delta} F^{a\beta} = F_{a\beta} F^{a\beta}$

Όγκος χωρόχρονου : $d^4x = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$: αναλλοίωτο υπό μετασχ. Lorentz $\rightarrow$

$dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = dx'_0\, dx'_1\, dx'_2\, dx'_3$

$dx'_0\, dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 = J\left(\frac{x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ x'_3}{x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3}\right) dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$, με

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx'_0}{dx_0} & \frac{dx'_1}{dx_0} & \frac{dx'_2}{dx_0} & \frac{dx'_3}{dx_0} \\ \frac{dx'_0}{dx_1} & \cdots & \cdots & \frac{dx'_3}{dx_1} \\ \frac{dx'_0}{dx_2} & \cdots & \cdots & \frac{dx'_3}{dx_2} \\ \frac{dx'_0}{dx_3} & \cdots & \cdots & \frac{dx'_3}{dx_3} \end{vmatrix}$$

Μετά από πράξεις, προκύπτει $J=1$, άρα ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος

Για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω στην ηλεκτροδυναμική, πρέπει:

1) να φτιάξουμε τετραδιανύσματα για τα μεγέθη της ηλεκτροδυναμικής

2) -//- αναλλοίωτες ποσότητες

Αποδεικνύεται ότι δύο τετραδιανύσματα είναι τα

$J_{\mu} = (\rho c, \vec{J}) = (\rho c, J_1, J_2, J_3)$

$A_{\mu} = (\phi/c, \vec{A}) = (\phi/c, A_1, A_2, A_3)$

Αξίωμα: Το φορτίο Q είναι αναλλοίωτο σε Σ και Σ' ($Q = Q'$ αξιωματικά)

Θα δείξουμε ότι J_{μ}, A_{μ} όντως είναι τετραδιανύσματα με βάση τους μετασχηματισμούς Lorentz

Πρέπει να δείξουμε ότι μετασχηματίζονται ως εξής:

$A_0 \rightarrow X_0$, $A_1 \rightarrow X_1$, $A_2 \rightarrow X_2$, $A_3 \rightarrow X_3$

$\phi' = \rho' dx_1' dx_2' dx_3' = \rho dx_1 dx_2 dx_3$ (αξιωματικά)

Παρατήρηση: Ούτε το ρ, ούτε το $dx_1 dx_2 dx_3$ είναι αναλλοίωτες ποσότητες, αλλά το γινόμενό τους είναι

Είναι: $\left.\begin{aligned} dx^4 &= dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\ q &= \rho dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}\right\}$ Τα συγκρίνουμε διότι dx^4 και ρ είναι αναλλοίωτα $\Rightarrow$ Συνεπώς το ρ πρέπει να μετασχηματίζεται όπως και το x_0

$\hookrightarrow \rho = \dfrac{q}{dx_1 dx_2 dx_3}$

Με την ίδια λογική: $J_1 dx_0 dx_2 dx_3$: αναλλοίωτη ποσότητα

$$J_1 dx_0 dx_2 dx_3 = \rho u_1 dx_0 dx_2 dx_3 = \frac{q}{dx_1 \cancel{dx_2} \cancel{dx_3}} u_1 dx_0 \cancel{dx_2} \cancel{dx_3} = q u_1 \frac{1}{\frac{dx_1}{dx_0}} \quad (1)$$

Επειδή $x_0 = ct \Rightarrow dx_0 = c\,dt$ (2)

$$(1)\wedge(2) \longrightarrow = \frac{q u_1}{\frac{1}{c}\frac{dx_1}{dt}} = \frac{q \cancel{u_1}}{\frac{1}{c}\cancel{u_1}} = qc : \text{con.}$$

Άρα το J_1 μετασχηματίζεται όπως το x_1, αλλιώς το $J_1 dx_0 dx_2 dx_3$ δεν θα ήταν αναλλοίωτο

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $J_2 dx_0 dx_1 dx_3$, $J_3 dx_0 dx_1 dx_2 = qc$

Με την βαθμίδα του Lorentz:

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_0}(\phi/c) + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad \left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla^2\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial(c^2t^2)} &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial(c^2t^2)} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial x_0^2} &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x_0^2} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \Box^2\phi &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \Box^2\vec{A} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned}\right.$$

π.χ. $\dfrac{\partial}{\partial x_0}(\phi/c) + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\partial^\mu A_\mu = 0}$, αφού $\partial^\mu A_\mu = \dfrac{\partial A_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial A_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial}{\partial x_0}(\phi/c) + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

Επίσης: $\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu$

Αυτό είναι διάνυσμα και δεν είναι αναλλοίωτο

Όπως οι εξ. Maxwell παίρνουν την ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα

Είναι $\Box^2 A_\nu = \Box^2 \Lambda^\mu_{\ \nu} A_\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \Box^2 A_\mu = -\mu_0 \Lambda^\mu_{\ \nu} J_\mu = -\mu_0 J_\nu$

Εισάγουμε τα $\vec{E}, \vec{B}$ στη θεωρία:

Είπαμε ότι: $A_\mu = (\phi/c, \vec{A})$ και $J_\mu = (\rho c, \vec{J})$

Άρα $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\hat{e}_1 + \left(-\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\hat{e}_3$

Θα δείξουμε ότι αυτά είναι συνιστώσες του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Ορίζουμε: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3$ ✓

πχ. $F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}$

Ισχύουν οι ιδιότητες: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ (αντισυμμετρικός τανυστής)

$$F_{k\ell} = \frac{\partial A_\ell}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^\ell} = \frac{\partial A_k}{\partial x_\ell} - \frac{\partial A_\ell}{\partial x_k} \qquad k,\ell = 1,2,3 \quad \text{(λόγω του μείον)}$$

Όλα τα $F_{\mu\nu}$ είναι στοιχεία πίνακα:

$$\left.\begin{array}{l} F_{0k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^k} = \frac{\partial A_0}{\partial x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial x_0} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\phi)_k \\ \text{Επειδή } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array}\right\} F_{0k} = -\frac{1}{c}E_k$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{πως θα γραφούν οι εξ. του Maxwell;}$$

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{\partial F_{\mu 0}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{\mu 1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{\mu 2}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{\mu 3}}{\partial x_3}$$

i. Για $\mu = 0$: $\partial^\nu F_{0\nu} = \cancel{\frac{\partial F_{00}}{\partial x_0}}^{\,0} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_0} =$

$= -\frac{1}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{J_0}{c} = -\mu_0 J_0$

ii. Για $\mu = k \neq 0$: $\partial^\nu F_{k\nu} = \frac{\partial F_{k0}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{2}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{k3}}{\partial x_3}$

πχ. $k=1$: $\partial^\nu F_{1\nu} = \frac{\partial F_{10}}{\partial x_0} + \cancel{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}}^{0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_0} - \frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{\partial B_2}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{c\partial t} - \left(\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right) =$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} - (\vec{\nabla}\times\vec{B})_1 = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_1$$

Άρα $\partial^\nu F_{1\nu} = -\mu_0 J_1$, ίδιο για $k=2,3$

Επομένως, μέχρι στιγμής έχουμε δείξει ότι:
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ και $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\,\partial\vec{E}/\partial t = \mu_0\vec{J}$

$\partial^\nu F_{\mu\nu} = -\mu_0 J_\mu$ → Η 1η και 4η από τις εξισώσεις του Maxwell

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(-F_{23})}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial(-F_{12})}{\partial x_3} = 0$ ή $\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial(-B_{31})}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} = 0$ ή

$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$, εν γένει:

$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ ✓

↓

Δείξαμε ότι από την παραπάνω προκύπτει η $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Για $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=2$ θα καταλήξουμε στην 2η εξίσ. του Maxwell

$\partial_0 F_{12} - \partial_1 F_{20} - \partial_2 F_{01} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_{12}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial B_3}{\partial x_0} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow$

$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_3}{\partial t} - \frac{1}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{E})_3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_3 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$

Ασκήσεις

1. $E'_k = -cF'_{0k}$ (στο κινούμενο σύστημα

Ποιος είναι ο F'_{0k}; (Μετασχηματισμός τανυστών)

$-cF'_{0k} = -c\Lambda_0^{\;a}\Lambda_k^{\;\beta}F_{a\beta}$ ($F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\;\lambda}\Lambda_\nu^{\;\rho}F_{\lambda\rho}$)

Αλλά δεν επιβιώνουν όλες οι συνιστώσες ($\Lambda=0$ για Λ_0^1, Λ_0^2)

$-c\Lambda_0^{\;a}\Lambda_k^{\;\beta}F_{a\beta} = -c\Lambda_0^{\;0}\Lambda_3^{\;\beta}F_{a\beta} = -c\Lambda_0^{\;3}\Lambda_3^{\;\beta}F_{3\beta}$

Όπως και πριν, κάποιοι όροι μηδενίζονται λόγω της άθροισης στο β ($\Lambda^2_3 = \Lambda^1_3 = 0$)

Άρα $-c\,\Lambda^3_0 \Lambda^\beta_3 F_{3\beta} = -c\,\Lambda^0_0 \Lambda^3_3 F_{03} + c\,\Lambda^3_0 \Lambda^0_3 F_{03} = -c F_{03}\,(\Lambda^0_0 \Lambda^3_3 - \Lambda^3_0 \Lambda^3_0) =$

$= -c F_{03}\,(\gamma^2 - (-\beta\gamma)(-\beta\gamma)) = -c F_{03}\,(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) = -c F_{03} = -E_3$

Άρα $E_3' = E_3$, αυτό που περιμέναμε δηλαδή

Η ίδια διαδικασία μπορεί να γίνει και για $k=1,2$, αλλά επειδή θεωρήσαμε κίνηση στον x_3, θα είναι $E_3 \neq E_3'$

Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία και για το $\vec{B}$:

$B_2' = F_{13}' = \Lambda^\lambda_1 \Lambda^\rho_3 F_{\lambda\rho} = \dots = \gamma\left(B_2 - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E})_2\right)$, $B_3 = B_3'$

2. Να βρεθούν αναλλοίωτες ποσότητες στο Σ και Σ'

$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$: αναλλοίωτη ποσότητα (βαθμωτό μέγεθος)

Γνωρίζουμε τον $F_{\mu\nu}$, πρέπει να βρούμε και τον $F^{\mu\nu}$

$F^{k\ell} = g^{ka} g^{\ell\beta} F_{a\beta}$, μετά από πράξεις προκύπτει:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

, προκύπτει $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{2}{c^2}\vec{E}^2 + 2\vec{B}^2$

Για λόγους μονάδων $\frac{1}{4\mu_0} = \frac{1}{4\mu_0}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$

Άρα $\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 = -U_E + U_B$

Επίσης αναλλοίωτη είναι και η ποσότητα:

$\frac{c}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, με $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$

Μπορεί νδο $\frac{c}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E}\cdot\vec{B}$

Συνεπώς και η $\vec{E}\cdot\vec{B}$ είναι μία αναλλοίωτη ποσότητα στα Σ και Σ'