<u>Άσκηση 1.</u>

Έστω ο τελεστής της θέσης $\hat{X}$ και ο τελεστής της ορμής $\hat{P}$.

Οι ιδιοτιμές του πρώτου $\hat{X}\left|x\right\rangle = x\left|x\right\rangle$ αντιστοιχούν στις δυνατές θέσεις ενός σωματίου ενώ οι ιδιοτιμές του δευτέρου $\hat{P}\left|p\right\rangle = p\left|p\right\rangle$ στις δυνατές ορμές. ′

Με μόνη αφετηρία τη σχέση μετάθεσης $[\hat{P},\hat{X}] = -i\hbar$ να δείξετε τα εξής:

(α) Η αναπαράσταση του τελεστή της ορμής στη βάση που συγκροτούν οι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της θέσης (: στο χώρο των θέσεων) είναι: $\left\langle x'\right|\hat{P}\left|x\right\rangle = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-x)$ και η αναπαράσταση του τελεστή της θέσης στο χώρο των ορμών είναι $\left\langle p'\right|\hat{X}\left|p\right\rangle = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)$

(Υπ.: Για να απαντήσετε γράψτε τη σχέση μετάθεσης στο χώρο των θέσεων:

$$\left\langle x'\right|[\hat{P},\hat{X}]\left|x\right\rangle = -i\hbar\left\langle x'\middle|x\right\rangle \Rightarrow (x-x')\left\langle x'\right|\hat{P}\left|x\right\rangle = -i\hbar\delta(x'-x) \qquad (1)$$

Για τη συνέχεια χρησιμοποιείστε την ακόλουθη ιδιότητα της δ-συνάρτησης

$$(x-x')\delta(x'-x) = 0 \qquad (2)$$

την οποία μπορείτε να αποδείξετε πολύ εύκολα αν τη δείτε μέσα σε ολοκλήρωμα.

Παραγωγίζοντας την (2) θα πάρετε: $(x-x')\dfrac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-x) = \delta(x'-x)$. Συγκρίνοντας την τελευταία με την (1) θά πάρετε το ζητούμενο. Επαναλάβετε το ίδιο με την ορμή.)

(β) Δείξτε ότι

$$\left\langle x\middle|p\right\rangle = \left\langle p\middle|x\right\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

(Υπ.:

$$\left\langle x'\right|\hat{P}\left|x\right\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x'-x) \Rightarrow \int dp\, p\left\langle x'\middle|p\right\rangle\left\langle p\middle|x\right\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}pe^{\frac{i}{\hbar}p(x'-x)}$$

$\Rightarrow \ldots$)

(γ) Έστω ότι $\hat{P}\left|\psi\right\rangle = \left|\varphi\right\rangle$. Δείξτε ότι $\varphi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$. Επίσης αν $\hat{X}\left|\psi\right\rangle = \left|\varphi\right\rangle$ δείξτε

ότι $\tilde{\varphi}(p) = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p)$ (όπου $\left\langle p\middle|\varphi\right\rangle = \tilde{\varphi}(p)$ και $\left\langle p\middle|\psi\right\rangle = \tilde{\psi}(p)$).

(Υπ.: $\hat{P}\left|\psi\right\rangle = \left|\varphi\right\rangle \Rightarrow \left\langle x\middle|\hat{P}\middle|\psi\right\rangle = \left\langle x\middle|\varphi\right\rangle \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx'\left\langle x\middle|\hat{P}\middle|x'\right\rangle\left\langle x'\middle|\psi\right\rangle = \varphi(x) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')]\psi(x') = \varphi(x) \Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = \varphi(x)\,.$$)

(δ) Δείξτε ότι $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}\tilde{\psi}(p)$ και ότι $\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi(x)$ με $\left\langle x\middle|\psi\right\rangle = \psi(x)$ και $\left\langle p\middle|\psi\right\rangle = \tilde{\psi}(p)$

(ε) Δείξτε ότι $\left[\hat{P}, f(\hat{X})\right] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}f(\hat{X})$ και ότι $\left[\hat{X}, f(\hat{P})\right] = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}f(\hat{P})$

(Υπ.: Γράψτε $\left[\hat{P}, f(\hat{X})\right]\left|g\right\rangle = \left|h\right\rangle$ και θεωρείστε την προβολή της σχέσης αυτής στο χώρο των θέσεων. Θα δείτε ότι $h(x) = [-i\hbar\frac{\partial f(x)}{\partial x}]g(x)$. Με τον ίδιο τρόπο θα δουλέψετε και για το δεύτερο από τα ζητούμενα.)

(στ) Δείξτε ότι $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{P}a}\hat{X}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{P}a} = \hat{X} + a\hat{I}$, ($\hat{I}$ ο μοναδιαίος τελεστής).

(Υπ.: Χρησιμοποείστε το ερώτημα (ε))

Παρατηρείστε ότι όλα τα αποτελέσματά σας στηρίζονται αποκλειστικά στη σχέση μετάθεσης των τελεστών θέσης και ορμής.

Άσκηση 2.

Έστω σύστημα το οποίο επιτρέπει μόνο δύο (κανονικοποιημένες) καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας . Σε κάποια ορθοκανονική βάση η Hamiltonian αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$\hat{H} \doteq \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 1 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές E_1 και E_2 και τις τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ της Hamiltonian.

(Υπ.: Έστω $|a\rangle$ και $|b\rangle$ η βάση στην οποία η Hamiltonian αναπαρίσταται από τον πίνακα της άσκησης. Προφανώς τα εν λόγω διανύσματα δεν είναι ιδιοανύσματα της Hamiltonian αφού ο πίνακας δεν είναι διαγώνιος. Στη βάση αυτή τα ιδιοανύσματα της Hamiltonian αναπαρίστανται από κάποια στήλη : $|1\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a|1\rangle \\ \langle b|1\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $|2\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a|2\rangle \\ \langle b|2\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Επομένως το πρόβλημα των ιδιοτιμών έχει τη γενική μορφή:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Από την εξίσωση αυτή θα βρείτε τις ιδιοτιμές $E_1 = 0$ και $E_2 = 2\varepsilon$. Τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα θα είναι $|1\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ και $|2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$

(β) Έστω A το μέγεθος τα ιδιοανύσματα του οποίου χρησιμοποιήθηκαν για την αναπαράσταση της Hamiltonian: $\hat{A}|a\rangle = \lambda_a |a\rangle$, $\hat{A}|b\rangle = \lambda_b |b\rangle$. Ας πούμε τώρα ότι μετράτε το συγκεκριμένο μέγεθος και βρίσκεται την τιμή λ_a (ή λ_b). Ποιό είναι το πλάτος πιθανότητας αν, στη συνέχεια, μετρήσετε την ενέργεια να βρείτε E_1 και ποιά E_2 ;

Άσκηση 3.

Ένα κβαντομηχανικό σύστημα διαθέτει μόνο δύο (κανονικοποιημένες) ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, τις $|1\rangle$ και $|2\rangle$. Το σύστημα διαθέτει, πέραν της ενέργειας, τρία άλλα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη, τα P , Q και R . Οι καταστάσεις της ενέργειας δεν είναι ιδιοκαταστάσεις των τελεστών $\hat{P}$, $\hat{Q}$ και $\hat{R}$. Σας δίδονται επιπλέον τα εξής πειραματικά δεδομένα (προσοχή, ένας από τους πειραματικούς φαίνεται απρόσεκτος και μάλλον έδωσε λάθος αποτελέσματα).

(α) $\langle 1|\hat{P}|1\rangle = 1/2$, $\langle 1|\hat{P}^2|1\rangle = 1/4$

(β) $\langle 1|\hat{Q}|1\rangle = 1/2$, $\langle 1|\hat{Q}^2|1\rangle = 1/6$

(γ) $\langle 1|\hat{R}|1\rangle = 1$, $\langle 1|\hat{R}^2|1\rangle = 5/4$, $\langle 1|\hat{R}^3|1\rangle = 7/4$

Προσπαθείστε να βρείτε τις ιδιοτιμές των $\hat{P}$, $\hat{Q}$ και $\hat{R}$. Βρείτε τον απρόσεκτο.

Υπ.: Ξεκινείστε αναλύοντας το $|1\rangle$ στις βάσεις που συγκροτούν τα ιδιοανύσματα του $\hat{P}$: $|1\rangle = \alpha_1|p_1\rangle + \alpha_2|p_2\rangle$, $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$. Αντικαθιστώντας στην (α) θα καταλήξετε στην εξίσωση $p_1^2 - p_1 + \frac{1}{4} = 0$ και επομένως $p_1 = \frac{1}{2}$. Εύκολα θα βρείτε και ότι $p_2 = \frac{1}{2}$.

Αν στη συνέχεια γράψετε $|1\rangle = \beta_1|q_1\rangle + \beta_2|q_2\rangle$ και πάτε στην (β) θα βρείτε $q_1^2 - q_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\frac{|\beta_2|^2}{|\beta_1|^2} = 0$. Η διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής είναι αρνητική: $\Delta = -\frac{1}{3}\frac{|\beta_2|^2}{|\beta_1|^2} < 0$ και επομένως πέσατε στον απρόσεκτο αφού οι ιδιοτιμές θα πρέπει να είναι πραγματικοί αριθμοί. Για το (γ) θα γράψετε $|1\rangle = \gamma_1|r_1\rangle + \gamma_2|r_2\rangle$ και θα βρείτε τις εξισώσεις : $|\gamma_1|^2 r_1 + |\gamma_2|^2 r_2 = 1$, $|\gamma_1|^2 r_1^2 + |\gamma_2|^2 r_2^2 = \frac{5}{4}$, $|\gamma_1|^2 r_1^3 + |\gamma_2|^2 r_2^3 = \frac{7}{4}$ και επομένως $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$.

Άσκηση 4.

Θεωρείστε και πάλι το σύστημα της άσκησης 2. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $\left|a\right\rangle$ (η οποία δεν είναι ιδιοκατάσταση της Hamiltonian). Ποιά είναι η πιθανότητα, μετά από χρόνο t, να βρεθεί και πάλι στην ίδια κατάσταση ;

Απ.: Στην άσκηση 2 βρήκατε : $\left|1\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\left|a\right\rangle - \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left|b\right\rangle$

και $\left|2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|a\right\rangle + \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left|b\right\rangle$. Επομένως $\left|a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|2\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$, $\left|b\right\rangle = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(\left|2\right\rangle - \left|1\right\rangle\right)$.

Άρα $\left|a\right\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left|a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle + e^{-\frac{2i\varepsilon}{\hbar}t}\left|2\right\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{2i\varepsilon}{\hbar}t}\right)\left|a\right\rangle - \frac{e^{-i\varphi}}{2}\left(1 - e^{-\frac{2i\varepsilon}{\hbar}t}\right)\left|b\right\rangle$

Επομένως η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $\left|a\right\rangle$ είναι $P_a = \cos^2(\frac{\varepsilon t}{\hbar})$ και η πιθανότητα να βρεθεί στη $\left|b\right\rangle$ είναι $P_b = \sin^2(\frac{\varepsilon t}{\hbar})$

Άσκηση 5.

Με τη βοήθεια των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

Απ.: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\beta}\hat{X} + i\frac{\beta}{\hbar}\hat{P}),\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\beta}\hat{X} - i\frac{\beta}{\hbar}\hat{P}) \quad (\beta^2 = \frac{\hbar}{m\omega})$

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle x\right|\hat{a}\left|0\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\left\langle x\right|\hat{a}\left|x'\right\rangle\left\langle x'|0\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\left\langle x\right|\hat{a}\left|x'\right\rangle\varphi_0(x') = 0 \qquad (1)$$

Στην πρώτη από τις ασκήσεις σας βρήκατε ότι:

$$\left\langle x\right|\hat{a}\left|x'\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}\left\langle x\right|\hat{X}\left|x'\right\rangle + \frac{i\beta}{\sqrt{2}\hbar}\left\langle x\right|\hat{P}\left|x'\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\beta}x + \beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x-x') \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \frac{d}{dx}\varphi_0(x)=-\frac{x}{\beta^2}\varphi_0(x)\Rightarrow \varphi_0(x)=A_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\Rightarrow\langle x|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\langle x|(\hat{a}^\dagger)^n|x'\rangle\varphi_0(x')\Rightarrow$$

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{A_0}{2^{n/2}}\left(\frac{x}{\beta}-\beta\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{A_0}{2^{n/2}}e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\mathrm{H}_n(\frac{x}{\beta})$$

Όπου $\mathrm{H}_n(\xi)=e^{\xi^2/2}\left(\xi-\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2/2}$ τα πολυώνυμα Hermite.

<u>Άσκηση 6</u>.

Τα ιδιοανύσματα των τελεστών θέσης και ορμής στην εικόνα Schroendinger καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$\hat{X}|x\rangle=x|x\rangle \quad \text{και} \quad \hat{P}|p\rangle=p|p\rangle .$$

(α) Ορίστε τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα $|x,t\rangle_H$ και $|p,t\rangle_H$ στην εικόνα Heisenberg.

(β) Δώστε την ερμηνεία της ποσότητας $K(x,x';t)\equiv {}_{\mathrm{H}}\langle x,t|x',0\rangle_H$ (1)

και δείξτε ότι είναι η λύση της εξίσωσης $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H_x)K(x,x';t)=0$ (2)

η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $K(x,x';0)=\delta(x-x')$.

(γ) Δείξτε ότι η $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'K(x,x';t)\psi(x',0)$ είναι λύση της εξ. (2) και αντίστροφα.

Απ.

Ξεκινώντας από την $\hat{X}|x\rangle=x|x\rangle$ βρίσκετε αμέσως ότι

$$\left(e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\hat{X}e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\right)e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}|x\rangle=xe^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}|x\rangle .$$

Ο πρώτος όρος είναι ο τελεστής της θέσης στην εικόνα του Heisenberg : $\hat{X}_H(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\hat{X}e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$. Προφανώς τα ανύσματα $\left|x,t\right\rangle_H \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left|x\right\rangle$ είναι τα ιδιοανύσματά του. Σημειώστε ότι για τα εν λόγω ανύσματα ισχύει η σχέση πληρότητας :

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\left|x,t\right\rangle_{H\,H}\left\langle x,t\right| = e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left|x\right\rangle\left\langle x\right|e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} = e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\hat{I}e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} = \hat{I}$. Με ανάλογο τρόπο θα βρείτε τα ιδιοανύσματα $\left|p,t\right\rangle_H \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left|p\right\rangle$ του τελεστή της ορμής στην εικόνα του Heisenberg :

$$\hat{P}_H(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\hat{P}e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} \quad , \quad \hat{P}_H(t)\left|p,t\right\rangle_H = p\left|p,t\right\rangle_H .$$

Αφού $\left|x,t\right\rangle_H$ είναι μια κατάσταση που σας λέει ότι τη χρονική στιγμή t βρίσκεστε στη θέση x, η ποσότητα $K(x,x';t) \equiv {}_H\left\langle x,t\middle|x',0\right\rangle_H$ σας δίνει το πλάτος πιθανότητας να βρεθείτε στη θέση x τη χρονική στιγμή t αν είσασταν στη θέση x' τη χρονική στιγμή 0. Για προφανείς λόγους η ποσότητα αυτή λέγεται ***διαδότης.***

Μπορείτε να δείτε ότι:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x';t) = \left\langle x\right|\hat{H}\exp[-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}]\left|x'\right\rangle = \int dx''\left\langle x\right|\hat{H}\left|x''\right\rangle\left\langle x''\right|\exp[-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}]\left|x'\right\rangle =$$

$$= \int dx'' H_x\delta(x-x'')K(x'',x';t) = H_xK(x,x';t)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την άσκηση 1 και γράψαμε $\left\langle x\right|\hat{H}\left|x''\right\rangle = H_x\left\langle x\middle|x''\right\rangle = H_x\delta(x-x'')$

με $H_x \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$.

<u>Άσκηση 7</u>.

Θεωρείστε ένα ελεύθερο σωμάτιο με μάζα m .

(α) Λύστε τις εξισώσεις κίνησης για τους τελεστές θέσης και ορμής στην εικόνα Heisenberg.

(β) Βρείτε τη μορφή των παραπάνω τελεστών στην αναπαράσταση θέσης.

(γ) Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές της θέσης και της ορμής τη χρονική στιγμή t.

(δ) Υπολογίστε τους μεταθέτες :

$$\left[\hat{x}_H(t_2), \hat{x}_H(t_1)\right] \quad , \quad \left[\hat{x}_H(t_2), \hat{p}_H(t_1)\right] \text{ και } \left[\hat{p}_H(t_2), \hat{p}_H(t_1)\right].$$

Υπ. Ξεκινείστε δείχνοντας ότι η εξίσωση Heisenberg $\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right]$ παίρνει, για το ελεύθερο σωμάτιο, τη μορφή $\frac{d}{dt}\hat{X}_H(t) = \frac{\hat{P}_H(t)}{m}$ με $\frac{d}{dt}\hat{P}_H(t) = 0$ ή $\frac{d^2}{dt^2}\hat{X}_H(t) = 0$ και προχωρείστε σαν να κάνατε κλασική μηχανική.

Θα βρείτε $[\hat{X}_H(t_2), \hat{X}_H(t_1)] = -i\hbar\frac{t_2 - t_1}{m}$, $[\hat{P}_H(t_2), \hat{P}_H(t_1)] = 0$, $[\hat{X}_H(t_2), \hat{P}_H(t_1)] = i\hbar$

Άσκηση 8.

Θεωρείστε ένα σωμάτιο το οποίο κινείται υπό την επίδραση του αρμονικού δυναμικού $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Να επαναλάβετε τα ερωτήματα (α)-(δ) της άσκησης (7).

(ε) Δείξτε ότι

$$(\Delta x)_{t_2}{}^2 (\Delta x)_{t_1}{}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}[\sin\omega(t_2 - t_1)]^2 .$$

Υπ.:

Δουλεύοντας όπως και πριν θα βρείτε $\frac{d}{dt}\hat{X}_H(t) = \frac{\hat{P}_H(t)}{m}$ και $\frac{d}{dt}\hat{P}_H(t) = -m\omega^2\hat{X}_H(t)$.

Λύνοντας θα δείτε ότι $\hat{X}_H(t) = \hat{X} + \frac{\sin(\omega t)}{m\omega}\hat{P}$, $\hat{P}_H(t) = -m\omega\sin(\omega t)\hat{X} + \cos(\omega t)\hat{P}$.

$$[\hat{X}_H(t_2), \hat{X}_H(t_1)] = -i\hbar\frac{\sin\omega(t_2 - t_1)}{m\omega}, \quad [\hat{P}_H(t_2), \hat{P}_H(t_1)] = -i\hbar m\omega\sin\omega(t_2 - t_1),$$

$$[\hat{X}_H(t_2), \hat{P}_H(t_1)] = i\hbar\cos\omega(t_2 - t_1)$$

<u>Άσκηση 9.</u>

Έστω σωμάτιο το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ (: οι δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r από κάποιο κέντρο). Να βρείτε τη χρονική εξέλιξη της μέσης απόστασης $\langle r \rangle_t$ αν το σωμάτιο κινείται (α) σε δύο διαστάσεις (β) σε τρείς διαστάσεις.

Απ.

Ξεκινείστε από την $\frac{d}{dt}\langle \hat{r} \rangle_t = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{r}, \hat{H}\right] \right\rangle_t$. Το ποιό ακριβώς είναι το δυναμικό δεν σας ενδιαφέρει αφού $\left[\hat{r}, V(\hat{r})\right] = 0$.

Η Hamiltonian αν γραφεί σε πολικές (για τις δύο διαστάσεις) ή σε σφαιρικές (για τις τρείς διαστάσεις) θα έχει ένα ακτινικό και ένα (ξεχωριστό) γωνιακό μέρος:

$$\hat{H} = \hat{H}_r + \hat{H}_{angle}.$$

Το τελευταίο δεν σας αφορά αφού $\left[\hat{r}, \hat{H}_{angle}\right] = 0$. Το μόνο που σας ενδιαφέρει είναι το ακτινικό μέρος . Σε δύο διαστάσεις αυτό είναι

$$\hat{H}_r^{(D=2)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

ενώ σε τρείς διαστάσεις είναι

$$\hat{H}_r^{(D=3)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{r} \rangle_t = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\hat{r}, \hat{H}_r^D\right] \right\rangle_t.$$

Για να βρείτε τον μεταθέτη πάρτε μια τυχαία συνάρτηση της απόστασης:

$$\left[\hat{r},\hat{H}_r^D\right]f(r)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{r\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}\right)f(r)-\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(rf(r)\right)\right\}=\frac{\hbar}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{D-1}{2r}\right)f(r)$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}\left\langle\hat{r}\right\rangle_t=\frac{1}{m}\left\langle\hat{p}_r^D\right\rangle$$

όπου

$$\hat{p}_r^{(D=2)}=-i\hbar\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{2r}\right)\text{ και }\hat{p}_r^{(D=3)}=-i\hbar\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)$$

ο τελεστής της λεγόμενης ***ακτινικής ορμής*** σε δύο και τρείς διαστάσεις αντίστοιχα.

<u>Άσκηση 10.</u>

Έστω $\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)$ διάνυσμα στο συνήθη τριδιάστατο χώρο . Ας πούμε τώρα ότι στρέφετε το εν λόγω διάνυσμα κατά γωνία α γύρω από τον άξονα z . Δείξτε ότι οι συνιστώσες θα αλλάξουν σύμφωνα με τον κανόνα:

$$\begin{pmatrix}A_x'\\A_y'\\A_z'\end{pmatrix}=R_z(\alpha)\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\text{ όπου}$$

$R_z(\alpha)\equiv\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ο πίνακας στροφής γύρω από τον άξονα z . Δείξτε ότι για μικρές γωνίες $\delta\alpha$ ισχύει ότι $\delta\vec{A}\equiv\vec{A}'-\vec{A}=\delta\alpha\left(\vec{z}\times\vec{A}\right)$. Εξετάστε τι γίνεται όταν το διάνυσμα στραφεί γύρω από τους άξονες x και y.

Απ.: Ένας τρόπος να δουλέψετε ξεκινάει από τη σχέση $\vec{A} = A_x\vec{x} + A_y\vec{y} + A_z\vec{z}$ όπου

$A_x = |\vec{A}|\cos\varphi\sin\theta,\ A_y = |\vec{A}|\sin\varphi\sin\theta,\ A_z = |\vec{A}|\cos\theta$. Στη συνέχεια κάνετε την αλλαγή

$\varphi \to \varphi + \alpha$ και διαπιστώστε ότι

$$A'_x = |\vec{A}|\cos(\varphi+\alpha)\sin\theta = A_x\cos\alpha - A_y\sin\alpha,\ A'_y = |\vec{A}|\sin(\varphi+\alpha)\sin\theta = A_x\sin\alpha + A_y\cos\alpha$$

και $A'_z = A_z$. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματά σας θα καταλήξετε στον ζητούμενο κανόνα.

Για μικρές γωνίες γράψτε $\cos\delta\alpha \simeq 1,\ \sin\delta\alpha \simeq \delta\alpha$ και θα διαπιστώστε ότι

$A'_x = A_x - A_y\delta\alpha \Rightarrow \delta A_x \equiv A'_x - A_x = -A_y\delta\alpha$ και με τον ίδιο τρόπο $\delta A_y = A_x\delta\alpha,\ \delta A_z = 0$.

Αν τώρα θυμηθείτε ότι $\left(\vec{z}\times\vec{A}\right)_x = \left(z_yA_z - z_zA_y\right) = -A_y,\ \left(\vec{z}\times\vec{A}\right)_y = \left(z_zA_x - z_xA_z\right) = A_x$ και

$\left(\vec{z}\times\vec{A}\right)_z = 0$ θα απαντήσετε αμέσως και στο δεύτερο ερώτημα.

Για τους άλλους άξονες μπορείτε να βρείτε αμέσως το αποτέλεσμα αν κάνετε τις κυκλικές αλλαγές $(xyz)\to(yzx)\to(zxy)$. Έτσι μετά το πρώτο βήμα οι άξονες θα αλλάξουν όνομα: $x\to y,\ y\to z,\ z\to x$. Οι προηγούμενες σχέσεις θα γίνουν τώρα:

$$A'_y = A_y\cos\alpha - A_z\sin\alpha,\ A'_z = A_y\sin\alpha + A_z\cos\alpha,\ A'_x = A_x$$

Συνοψίζοντας θα βρείτε

$R_x(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ και με τον ίδιο τρόπο $R_y(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Για απειροστές στροφές γύρω από τό άξονα x θα βρείτε ότι $\delta\vec{A} = \delta\alpha\left(\vec{x}\times\vec{A}\right)$ και για απειροστές στροφές γύρω από τον άξονα y, $\delta\vec{A} = \delta\alpha\left(\vec{y}\times\vec{A}\right)$.

<u>Άσκηση 11.</u> ***(Βοήθημα θεωρίας)***

Εάν ένα κλασικό άνυσμα $\vec{r}$ μετατοπισθεί κατά $\vec{a}$, θα προκύψει το άνυσμα $\vec{r}_a = \vec{r} + \vec{a}$.

Χρησιμοποιείστε την πληροφορία αυτή για να δείξετε ότι ο τελεστής που θα μεταφέρει το άνυσμα

$\left|\vec{r}\right\rangle$ (ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης με ιδιοτιμή $\vec{r}$) στο άνυσμα $\left|\vec{r}_a\right\rangle = \left|\vec{r}+\vec{a}\right\rangle$

(ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης με ιδιοτιμή $\vec{r}_a = \vec{r} + \vec{a}$) :

$$\hat{T}(\vec{a})\left|\vec{r}\right\rangle = \left|\vec{r}+\vec{a}\right\rangle$$

έχει τη μορφή :

$$\hat{T}(\vec{a}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}\right)$$

όπου $\hat{\vec{P}}$ είναι ο τελεστής της ορμής.

Απάντηση.

Αν κάνουμε μια απειροστή μετατόπιση ενός συνήθους ανύσματος (του τρισδιάτατου συστήματος

συντεταγμένων) $\vec{r}$ κατά $\delta\vec{a}$ θα προκύψει ένα καινούργιο άνυσμα

$$\vec{r}_\varepsilon = \vec{r} + \vec{a} \qquad (1)$$

Με την μεταβολή αυτή θα αλλάξει, βέβαια, και η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει κάποιο

σωματίδιο :

$$\psi(\vec{r}_{\delta a}) = \psi(\vec{r}+\delta\vec{a}) = \left(1+\delta\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi(\vec{r}) \qquad (2)$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση (η οποία προέκυψε αναπτύσσοντας κατά Taylor)

μπορεί να θεωρηθεί ως *ο τελεστής των απειροστών μετατοπίσεων* (σωστότερα: η αναπαράσταση

του στο χώρο των θέσεων).

[**Παρατήρηση:** Αν το σωματίδιο για το οποίο συζητάμε είναι ελεύθερο είναι προφανές ότι η αλλαγή που επιφέρει ο εν λόγω τελεστής δεν πρέπει να αλλάζει τη δυναμική εξέλιξή του : Είτε πρώτα λύσουμε την εξίσωση Schroedinger και μετά εφαρμόσουμε την αλλαγή (2) είτε κάνουμε την συγκεκριμένη μετατόπιση και μετά λύσουμε την εξίσωση Schroedinger , θα πρέπει να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα. Τοποθετημένη αλλιώς αυτή η απαίτηση λέει ότι ο τελεστής στη σχέση (2) πρέπει να μετατίθεται με την Hamiltonian . Το συμπέρασμα αυτό αφορά, βέβαια, στον παράγοντα $\vec{\nabla}$ αφού οι άλλες ποσότητες στην παρένθεση είναι σταθερές. Επομένως το φυσικό μέγεθος το οποίο αντιπροσωπεύεται (στον χώρο των θέσεων) από τον εν λόγω τελεστή θα πρέπει να διατηρείται. Είναι γνωστό ότι το μέγεθος το οποίο διατηρείται στις μετατοπίσεις ενός ελευθέρου σωμάτιου (λόγω της ομογένειας του χώρου) είναι η **ορμή.** Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής $\vec{\nabla}$ πρέπει να συνδέεται με την αναπαράσταση του τελεστή της ορμής στο χώρο των θέσεων : $\hat{\vec{P}} \to c\vec{\nabla}$. Ο συντελεστής στη σχέση μπορεί να βρεθεί από την αρχή της αντιστοιχίας και είναι $c = -i\hbar$.]

Για τον συστηματικό προσδιορισμό του εν λόγω τελεστή ας πάμε τώρα στον χώρο Hilbert και ας προσπαθήσουμε να βρούμε τον τελεστή ο οποίος δρώντας επάνω σε μια κατάσταση που είναι αρχικά εντοπισμένη γύρω από τη θέση $\vec{r}$, την μετατρέπει σε μια κατάσταση που είναι εντοπισμένη γύρω από τη θέση $\vec{r}_a$.

Θα ορίσουμε τον τελεστή $\hat{T}(\delta\vec{a})$ με τη σχέση

$$\left|\vec{r}_{\delta a}\right\rangle = \hat{T}(\delta a)\left|\vec{r}\right\rangle = \left|\vec{r} + \delta\vec{a}\right\rangle \qquad (3)$$

Επειδή η παραπάνω αλλαγή θέλουμε να διατηρεί το μέτρο των ανυσμάτων

$$\left\langle \vec{r}_1 + \delta\vec{a} \middle| \vec{r}_2 + \delta\vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{r}_1 \middle| \hat{T}^{\dagger}(\delta\vec{a})\hat{T}(\delta\vec{a}) \middle| \vec{r}_2 \right\rangle = \left\langle \vec{r}_1 \middle| \vec{r}_2 \right\rangle = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

ο τελεστής αυτός θα πρέπει να είναι ***μοναδιακός(unitary) :***

$$\hat{T}^{\dagger}\hat{T} = I$$

Ο απλούστερος (και πιο γενικός) τρόπος να γράψουμε έναν τέτοιο τελεστή είναι

$$\hat{T}(\vec{a}) = I - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{a} \cdot \hat{\vec{P}} \qquad (4)$$

Στην προηγούμενη σχέση ο τελεστής $\hat{\vec{P}}$ είναι ερμιτιανός τελεστής (ώστε ο $\hat{T}(\vec{a})$ να είναι μοναδιαίος) ενώ ο παράγοντας $-1/\hbar$ είναι θέμα σύμβασης (τον διαλέξαμε έτσι ώστε ο τελεστής

$\hat{\vec{P}}$ να έχει διαστάσεις ορμής).

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι

$$\langle \vec{r}_{\delta a} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \hat{T}^{\dagger}(\delta\vec{a}) | \psi \rangle = \int d\vec{r}' \langle \vec{r} | \hat{T}^{\dagger}(\delta\vec{a}) | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \psi \rangle \qquad (5)$$

Από τις εξ. (2), (4) και (5) βρίσκουμε:

$$\left(1 + \delta\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right) \psi(r) = \int d\vec{r}' \left(\delta(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{i}{\hbar} \langle \vec{r} | \delta\vec{a} \cdot \hat{\vec{P}} | \vec{r}' \rangle \right) \psi(\vec{r}') \qquad (6)$$

και επομένως η αναπαράσταση του τελεστή $\hat{\vec{P}}$ στο χώρο των θέσεων είναι

$$\langle \vec{r} | \hat{\vec{P}} | \vec{r}' \rangle = -i\hbar \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (7)$$

είναι, δηλαδή, ο τελεστής που αντιπροσωπεύει το φυσικό μέγεθος ορμή.

Έχοντας βρεί το τελεστή που επάγει τις απειροστές μετατοπίσεις μπορούμε να βρούμε και αυτόν που αντιστοιχεί σε πεπερασμένες : Αρκεί να χωρίσουμε τη συνολική μετατόπιση $\vec{a}$ σε στοιχειώδη βήματα $\delta\vec{a} = \frac{\vec{a}}{N} \to 0$ και να εφαρμόσουμε επανειλημμένα τον τελεστή (4) :

$$\hat{T}(\vec{a}) = \lim_{N\to\infty} (I - \frac{i}{\hbar} \frac{\vec{a}}{N} \cdot \hat{\vec{P}})^N \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \hat{\vec{P}} \right) \qquad (8)$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι ο ***τελεστής της ορμής είναι ο γεννήτορας των μετατοπίσεων*** όπως , εξάλλου, συμβαίνει και στην κλασική μηχανική.

<u>Άσκηση 12</u>. ***(Βοήθημα θεωρίας)***

Θεωρείστε ως δεδομένο ότι εάν ένα κλασικό άνυσμα $\vec{r}$ στραφεί κατά απειροστή γωνία $\delta\varphi$ γύρω από τη διεύθυνση $\vec{n}$ θα αλλάξει ως εξής :

$$\vec{r}_R = \vec{r} + \delta\varphi(\vec{n} \times \vec{r})$$

Χρησιμοποιείστε την πληροφορία αυτή για να δείξετε ότι ο τελεστής ο οποίος στρέφει την κατάσταση $\left|\vec{r}\right\rangle$ (ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης με ιδιοτιμή $\vec{r}$) στην κατάσταση $\left|\vec{r}_R\right\rangle$ (ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης με ιδιοτιμή $\vec{r}_R$)

$$\left|\vec{r}_R\right\rangle = \hat{D}(\vec{n},\varphi)\left|\vec{r}\right\rangle$$

έχει την μορφή

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}\right)$$

όπου $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{P}}$ ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής.

Απάντηση.

Αν κάνουμε μια απειροστή στροφή ενός συνήθους ανύσματος (του τρισδιάστατου συστήματος συντεταγμένων) $\vec{r}$ κατά γωνία $\delta\varphi$ γύρω από κάποια κατεύθυνση $\vec{n}$ θα πάρουμε ένα νέο άνυσμα

$$\vec{r}_R = \vec{r} + \delta\varphi(\vec{n}\times\vec{r}) \qquad (1)$$

Με την μεταβολή αυτή θα αλλάξει και η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει κάποιο σωματίδιο το οποίο ήταν εντοπισμένο γύρω από τη θέση $\vec{r}$:

$$\psi(\vec{r}_R) = \psi(\vec{r} + \delta\varphi\vec{n}\times\vec{r}) = \left(1+\delta\varphi(\vec{n}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\right)\psi(r) = \left(1+\delta\varphi\vec{n}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\psi(r) \qquad (2)$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση μπορεί να θεωρηθεί ως ο τελεστής (σωστότερα : η αναπαράσταση του στο χώρο των θέσεων) των απειροστών στροφών. Αν το σωματίδιο για το οποίο συζητάμε είναι ελεύθερο ή βρίσκεται υπό την επήρεια δυνάμεων οι οποίες είναι ίδιες προς όλες τις κατευθύνσεις (:κεντρικές) είναι προφανές ότι η αλλαγή που επιφέρει ο τελεστής (2) δεν πρέπει να αλλάζει την δυναμική του εξέλιξη : Ο τελεστής στην (2) θα πρέπει να μετατίθεται με την Hamiltonian . Αυτή η απαίτηση αφορά ουσιαστικά στον όρο $\vec{r}\times\vec{\nabla}$ αφού οι υπόλοιποι όροι μέσα στην παρένθεση είναι σταθεροί .Επομένως το φυσικό μέγεθος το οποίο αντιπροσωπεύεται από τον τελεστή αυτόν είναι ένα διατηρήσιμο μέγεθος. Είναι γνωστό ότι το φυσικό μέγεθος το οποίο διατηρείται λόγω της ισοτροπίας του χώρου (: όλες οι διευθύνσεις ισοδύναμες) είναι η (τροχιακή) **στροφορμή**.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής $\vec{r}\times\vec{\nabla}$ πρέπει να συνδέεται με την αναπαράσταση του τελεστή της στροφορμής στο χώρο των θέσεων.

Η σύνδεση αυτή μπορεί να γίνει συστηματικά αν πάμε στον χώρο Hilbert και προσπαθήσουμε να βρούμε τον τελεστή ο οποίος δρώντας επάνω σε μια κατάσταση που είναι αρχικά εντοπισμένη γύρω από τη θέση $\vec{r}$, την μετατρέπει σε μια κατάσταση που είναι εντοπισμένη γύρω από τη θέση $\vec{r}_R$.Θα ορίσουμε τον τελεστή $\hat{D}(\vec{n},\delta\varphi)$ με την σχέση :

$$\hat{D}(\vec{n},\delta\varphi)\left|\vec{r}\right\rangle=\left|\vec{r}_R\right\rangle=\left|\vec{r}+\delta\varphi(\vec{n}\times\vec{r})\right\rangle \tag{3}$$

Επειδή η παραπάνω αλλαγή θέλουμε να διατηρεί το μέτρο των ανυσμάτων , ο τελεστής αυτός θα πρέπει να είναι μοναδιακός (unitary) :

$$\hat{D}^{\dagger}\hat{D}=I$$

Ο απλούστερος τρόπος να γράψουμε έναν τέτοιο τελεστή είναι

$$\hat{D}(\vec{n},\delta\varphi)=I-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}} \tag{4}$$

με τον τελεστή $\hat{\vec{L}}$ να είναι ερμιτιανός (ο παράγοντας $-1/\hbar$ στην προηγούμενη σχέση είναι καθαρά θέμα σύμβασης).

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι

$$\left\langle\vec{r}_R\middle|\psi\right\rangle=\left\langle\vec{r}\middle|\hat{D}^{\dagger}(\vec{n},\delta\varphi)\middle|\psi\right\rangle=\int d\vec{r}'\left\langle\vec{r}\middle|\hat{D}^{\dagger}(\vec{n},\delta\varphi)\middle|\vec{r}'\right\rangle\left\langle\vec{r}'\middle|\psi\right\rangle \tag{5}$$

Από τις εξ. (2), (4) και (5) βρίσκουμε:

$$\left(1+\delta\varphi\vec{n}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\psi(r)=\int d\vec{r}'\left(\delta(\vec{r}-\vec{r}')+\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\left\langle\vec{r}\middle|\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}\middle|\vec{r}'\right\rangle\right)\psi(\vec{r}')$$

και επομένως η αναπαράσταση του τελεστή $\hat{\vec{L}}$ στο χώρο των θέσεων είναι

$$\left\langle \vec{r} \left| \hat{\vec{L}} \right| \vec{r}' \right\rangle = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{6}$$

αν μάλιστα ανακαλέσουμε την αναπαράσταση του τελεστή της ορμής στο χώρο των θέσεων

$$\left\langle \vec{r} \left| \hat{\vec{P}} \right| \vec{r}' \right\rangle = -i\hbar \vec{\nabla}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{7}$$

είναι προφανές ότι ο τελεστής $\hat{\vec{L}}$ έχει τη μορφή:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{P}} \tag{8}$$

και σύμφωνα με τη συζήτηση που κάναμε στην αρχή ο τελεστής αυτός πρέπει να αντιπροσωπεύει το φυσικό μέγεθος **τροχιακή στροφορμή**.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (8) βλέπουμε ότι ο τελεστής που επάγει τις απειροστές στροφές έχει την μορφή :

$$\hat{D}(\vec{n}, \delta\varphi) = I - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}} = I - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi \vec{n} \cdot (\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{P}}) \tag{9}$$

Για να βρούμε τον τελεστή ο οποίος αφορά σε πεπερασμένη στροφή κατά γωνία φ δεν έχουμε παρά να την χωρίσουμε σε N μέρη μεγέθους $\delta\varphi$ έτσι ώστε $\delta\varphi = \frac{\varphi}{N} \to 0$ και να εφαρμόσουμε επανειλημμένα τον τελεστή (9) :

$$\hat{D}(\vec{n}, \varphi) = \lim_{N\to\infty} (I - \frac{i}{\hbar}\frac{\varphi}{N} \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}})^N \equiv \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi \vec{n} \cdot \hat{\vec{L}} \right) \tag{10}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι ***ο τελεστής της στροφορμής είναι ο γεννήτορας των στροφών*** (όπως, εξάλλου, και στην κλασική μηχανική η στροφορμή είναι ο γεννήτορας των στροφών.)

<u>Άσκηση 13</u>. (*)

Θεωρείστε ως δεδομένο ότι εάν ένα φυσικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από το καταστατικό άνυσμα $|\psi\rangle$ στραφεί κατά γωνία φ γύρω από κάποιον άξονα $\vec{n}$, θα περιγράφεται από ένα καινούργιο άνυσμα

$$|\psi_R\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{J}}\right)|\psi\rangle.$$

Δείξτε τώρα ότι αν απαιτήσετε η αναμενόμενη τιμή του τελεστή $\hat{\vec{J}}$ να συμπεριφέρεται σαν κλασικό άνυσμα θα πρέπει

$$\left[\hat{J}_x,\hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_z,\ \left[\hat{J}_y,\hat{J}_z\right] = i\hbar\hat{J}_x,\ \left[\hat{J}_z,\hat{J}_x\right] = i\hbar\hat{J}_y.$$

Απ.: Ξεκινείστε διαλέγοντας τον άξονα z ως τον άξονα περιστροφής και την γωνία περιστροφής απειροστή. Αυτό που πρέπει να δείξετε είναι (σύμφωνα με την άσκηση 10) είναι ότι

$\langle J_x\rangle_R = \langle J_x\rangle - \delta\varphi\langle J_y\rangle$ όπου $\langle J_x\rangle_R \equiv {}_R\langle\psi|\hat{J}_x|\psi\rangle_R = \langle\psi|\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{J}_z\right)\hat{J}_x\left(1-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi\hat{J}_z\right)|\psi\rangle.$

<u>Άσκηση 14.</u> (*)

(α) Στην άσκηση 10 βρήκατε τους πίνακες οι οποίοι στρέφουν ένα κλασικό άνυσμα. Θεωρείστε τη γωνία στροφής πολύ μικρή $\varphi \simeq \varepsilon$ και κρατώντας όρους τάξης ε^2 δείξτε ότ

$$R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = -1 + R_z(\varepsilon^2)$$

(β) Αν σε κάθε πίνακα R που στρέφει ένα κλασικό άνυσμα αντιστοιχίσετε έναν τελεστή

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{J}}\right)$$

που στρέφει ένα καταστατικό άνυσμα, δείξτε ότι το ερώτημα (β) θα σας οδηγήσει στη διαπίστωση

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar \hat{J}_z .$$

Σχόλιο: ***Προσέξτε το συμπέρασμα των δύο τελευταίων ασκήσεων. Στηρίζονται και οι δύο στις πιο γενικές απαιτήσεις που μπορεί να θέσει κάποιος που μελετάει την απόκριση ενός φυσικού συστήματος σε στροφές. Οδηγούν και οι δύο στις γνωστές σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν και οι συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής. Είναι, εν τούτοις, προφανές ότι το συμπέρασμα αυτό δεν μπορεί να ταυτίσει τον τελεστή $\hat{\vec{J}}$ με τον τελεστή $\hat{\vec{L}}$.***

__Άσκηση 15.__ ***(μαζί με κάποια στοιχεία θεωρίας)***

Σωμάτιο έχει τροχιακή στροφορμή $l=1$ (σημ.: Με την έκφραση αυτή εννοούμε ότι το μέτρο της χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό $l=1$). Μετράμε την προβολή της στον άξονα x και βρίσκουμε $+\hbar$. Ποιά είναι η πιθανότητα αν, στη συνέχεια, μετρήσουμε την προβολή της στον άξονα z να βρούμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα.

Απ. Εφόσον μετρήσατε την προβολή της στροφορμής στον άξονα x αμέσως μετά το σωμάτιο βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του $\hat{L}_x$. Άρα το πρώτο που σας χρειάζεται είναι να βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του εν λόγω τελεστή. Στη συνέχεια θέλετε να μετρήσετε την προβολή στον άξονα z. Για να απαντήσετε πρέπει να εκφράσετε τις ιδιοκαταστάσεις του $\hat{L}_x$ μέσω των ιδιοκαταστάσεων του $\hat{L}_z$. Στο πρώτο ερώτημα μπορείτε να απαντήσετε με διάφορους τρόπους. Σε κάθε περίπτωση σας χρειάζεται μια βάση στην οποία να δουλέψετε. Βολεύει να χρησιμοποιήσετε ως βάση τα ιδιοανύσματα του $\hat{L}_z$. Έστω $\left|l=1, m_x=1\right\rangle \equiv \left|1_x\right\rangle$, $\left|l=1, m_x=0\right\rangle \equiv \left|0_x\right\rangle$, $\left|l=1, m_x=-1\right\rangle \equiv \left|-1_x\right\rangle$ τα ιδιοανύσματα του $\hat{L}_x$:

$$\hat{L}_x\left|1_x\right\rangle = \hbar\left|1_x\right\rangle,\ \hat{L}_x\left|0_x\right\rangle = 0,\ \hat{L}_x\left|-1_x\right\rangle = -\hbar\left|1_x\right\rangle$$

(όπως είναι προφανές σε όποια διεύθυνση και αν μετρήσουμε τη στροφορμή τα δυνατά αποτελέσματα είναι $+\hbar, 0, -\hbar$: Η ονομασία των αξόνων είναι θέμα σύμβασης και δεν είναι δυνατόν το αποτέλεσμα της μέτρησης να εξαρτάται από το πως διάλεξε κάποιος να ονομάσει τους άξονες.).
Έστω $\left|l=1, m=1\right\rangle \equiv \left|1\right\rangle,\ \left|l=1, m=0\right\rangle \equiv \left|0\right\rangle,\ \left|l=1, m=-1\right\rangle \equiv \left|-1\right\rangle$ τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα του $\hat{L}_z$. Τα ανύσματα αυτά αποτελούν βάση και επομένως μπορούμε να γράψουμε:
$\left|1_x\right\rangle = \alpha\left|1\right\rangle + \beta\left|0\right\rangle + \gamma\left|-1\right\rangle$ και αντίστοιχα για τα $\left|0_x\right\rangle$ και $\left|1_x\right\rangle$. Προφανώς θα πρέπει

$$\alpha \hat{L}_x\left|1\right\rangle + \beta \hat{L}_x\left|0\right\rangle + \gamma \hat{L}_x\left|-1\right\rangle = \hbar\alpha\left|1\right\rangle + \hbar\beta\left|0\right\rangle + \hbar\gamma\left|-1\right\rangle \tag{1}$$

Γράφουμε στη συνέχεια $\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$\hat{L}_+\left|1\right\rangle = 0,\ \hat{L}_-\left|1\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|0\right\rangle,\ \hat{L}_+\left|0\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|1\right\rangle,\ \hat{L}_-\left|0\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|-1\right\rangle,\ \hat{L}_+\left|-1\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|0\right\rangle,\ \hat{L}_-\left|-1\right\rangle = 0$
βρίσκουμε ότι η (1) γίνεται:

$$\frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle + \frac{(\alpha+\gamma)\hbar}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2}}\left|-1\right\rangle = \hbar\alpha\left|1\right\rangle + \hbar\beta\left|0\right\rangle + \hbar\gamma\left|-1\right\rangle \tag{2}$$

και επομένως $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \gamma = \frac{1}{2}$. Έτσι βρίσκουμε ότι $\left|1_x\right\rangle = \frac{1}{2}\left|1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|-1\right\rangle$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P_1 = \frac{1}{4} = 25\%$.

Με την ίδια λογική μπορείτε να βρείτε $\left|0_x\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-1\right\rangle$ και $\left|-1_x\right\rangle = \frac{1}{2}\left|1\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0\right\rangle + \frac{1}{2}\left|-1\right\rangle$
και μπορείτε εύκολα να απαντήσετε σε ερωτήσεις του τύπου : Μετρήθηκε η προβολή στον άξονα x και βρέθηκε 0 (ή $-\hbar$). Ποιά είναι η πιθανότητα να βρείτε την προβολή στον άξονα z να έχει την τάδε τιμή. Μπορείτε την παραπάνω τριάδα σχέσεων να την αντιστρέψετε και να εκφράσετε τις ιδιοκαταστάσεις του $\hat{L}_z$ μέσω των ιδιοκαταστάσεων του $\hat{L}_x$:

$$\left|1\right\rangle = \frac{1}{2}\left|1_x\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0_x\right\rangle + \frac{1}{2}\left|-1_x\right\rangle,\ \left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1_x\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-1_x\right\rangle,\ \left|-1\right\rangle = \frac{1}{2}\left|1_x\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0_x\right\rangle + \frac{1}{2}\left|-1_x\right\rangle$$

(μην σας εκπλήσει η ομοιότητα των εκφράσεων. Στο κάτω-κάτω το μόνο που κάνουμε είναι μια μετονομασία $z \leftrightarrow x$). Με τη βοήθεια αυτών των σχέσεων μπορείτε να απαντήσετε σε ερωτήματα του τύπου: Μετρήθηκε η προβολή της στροφορμής στον άξονα z και βρέθηκε...Ποιά είναι η πιθανότητα αν μετρηθεί, στη συνέχεια, η προβολή στον άξονα x να βρείτε....;

'Ενας άλλος τρόπος να βρείτε την απάντηση είναι να δουλέψετε με πίνακες. Μπορείτε, έτσι να βρείτε την αναπαράσταση του τελεστή $\hat{L}_x$ στη βάση που συγκροτούν οι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{L}_z$:

$$\hat{L}_x \doteq \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{L}_x|1\rangle & \langle 1|\hat{L}_x|0\rangle & \langle 1|\hat{L}_x|-1\rangle \\ \langle 0|\hat{L}_x|1\rangle & \langle 0|\hat{L}_x|0\rangle & \langle 0|\hat{L}_x|-1\rangle \\ \langle -1|\hat{L}_x|1\rangle & \langle -1|\hat{L}_x|0\rangle & \langle -1|\hat{L}_x|-1\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρέπει τώρα να λύσετε το πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων του τελευταίου πίνακα:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Θα διαπιστώσετε ότι υπάρχουν 3 ιδιοτιμές $\lambda = \pm\sqrt{2},\ 0$ όπως ακριβώς θα περιμένατε. Τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα είναι :

$$\lambda = +\sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda = -\sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Στην βάση που χρησιμοποιούμε το ίδια τα ιδιοανύσματα του $\hat{L}_z$ αναπαρίστανται από τις στήλες:

$$|1\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle 1|1\rangle \\ \langle 0|1\rangle \\ \langle -1|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ |0\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle 1|0\rangle \\ \langle 0|0\rangle \\ \langle -1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |-1\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle 1|-1\rangle \\ \langle 0|-1\rangle \\ \langle -1|-1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και προφανώς αναπαράγονται τα ήδη γνωστά αποτελέσματα:

$$|1_x\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ |0_x\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-1_x\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορεί να τα μεταφέρει κανείς και στο χώρο των θέσεων.

Εδώ η βάση που συνήθως χρησιμοποιούμε είναι η αναπαράσταση των ιδιοανυσμάτων του $\hat{L}_z$ στο χώρο των θέσεων που δεν είναι παρά οι σφαιρικές αρμονικές. Ας δούμε πώς ενεργοποιείται η αντιστοιχία. Καταρχή μπορεί να ορίσει κανείς τον *τελεστή διεύθυνσης* (όπως ορίζει τον τελεστή θέσης):

$$\hat{\vec{n}} \equiv \frac{1}{|\vec{r}|}\hat{\vec{r}} \ .$$

Τα ιδιοανύσματά του ορίζονται από τη σχέση

$$\hat{\vec{n}}\left|\vec{n}\right\rangle = \vec{n}\left|\vec{n}\right\rangle \text{ όπου } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi\sin\theta\vec{x} + \sin\varphi\sin\theta\vec{y} + \cos\theta\vec{z}$$

το μοναδιαίο άνυσμα σε κάποια συγκεκριμένη διεύθυνση. Όταν είμαστε σε ιδιοκατάσταση του τελεστή διεύθυνσης βρισκόμαστε επάνω σε μια σφαίρα με ακτίνα μονάδα και σε ένα σημείο που καθορίζεται από συγκεκριμένες γωνίες (θ,φ).Τα ανύσματα $\left|\vec{n}\right\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες και ορθοκανονικό σύνολο ανυσμάτων και επομένως μπορούν να αποτελέσουν βάση :

$$\left\langle \vec{n}'\middle|\vec{n}\right\rangle = \delta(\vec{n}'-\vec{n}), \ \int d\vec{n}\left|\vec{n}\right\rangle\left\langle\vec{n}\right| = \hat{I} \ , \left(\int d\vec{n} \equiv \int_{|\vec{r}|=1} d\vec{r}\right)$$

Για να καταλάβουμε τι σημαίνει η δ-συνάρτηση που χρησιμοποιήσαμε ας ξεκινήσουμε από τον ορισμό $\int d^3r\delta(\vec{r}-\vec{r}')f(\vec{r}) = f(\vec{r}')$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες και επάνω σε μια σφαίρα με ακτίνα μονάδα θα πάρει τη μορφή $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\delta(...)f(1,\varphi,\theta) = f(1,\varphi',\theta')$ όπου αφήσαμε αδιευκρίνιστη τη μορφή που έχει η δ-συνάρτηση .

Αν προσέξουμε, όμως, λίγο την τελευταία σχέση μπορούμε αμέσως να μαντέψουμε ότι πρέπει να γραψουμε $\delta(...) = \frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')$. Αυτή ακριβώς είναι η έκφραση που χρησιμοποιήσαμε στη σχέση ορθογωνιότητας.

Μετά από αυτά μπορούμε να γράψουμε $\left|l,m\right\rangle = \int d\vec{n}\left\langle\vec{n}\middle|l,m\right\rangle\left|\vec{n}\right\rangle$. Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα αυτό παρουσιάζουν το πλάτος πιθανότητας ένα σωμάτιο με στροφορμή l και προβολή στον άξονα z, $m\hbar$ να βρεθεί στην κατεύθυνση $\vec{n}$ που καθορίζεται από τις γωνίες (θ,φ). Είναι, επομένως, οι σφαιρικές αρμονικές : $\left\langle\vec{n}\middle|l,m\right\rangle = \Upsilon_l^m(\theta,\varphi)$. Αντίστοιχα οι συναρτήσεις $\left\langle\vec{n}\middle|l,m_x\right\rangle = \Phi_l^m(\theta,\varphi)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{L}_x$: $\hat{L}_x\Phi_l^{m_x}(\theta,\varphi) = \hbar m_x\Phi_l^{m_x}(\theta,\varphi)$. Με την ανάλυση του προβλήματος βρήκαμε ότι $\Phi_1^1(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\Upsilon_1^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Upsilon_1^0 + \frac{1}{2}\Upsilon_1^{-1}$. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των σφαιρικών αρμονικών

$\Upsilon_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta,\ \Upsilon_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ \Upsilon_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta$ θα πάρουμε:

$\Phi_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(\cos\theta - i\sin\theta\sin\varphi\right)$. Έτσι αν κάποιος σας ρωτούσε ποιά είναι πιθανότητα ένα σωμάτιο με $l=1$ και $m_x = 1$ να βρεθεί στη γειτονιά της στερεάς γωνίας $\Omega(\theta,\varphi)$ θα απαντούσατε: $\frac{3}{8\pi}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi\right)$.

Άσκηση 16. (*)

Σωμάτιο έχει τροχιακή στροφορμή $l=1$ Μετράμε την προβολή της στον άξονα y και βρίσκουμε $+\hbar$. Ποιά είναι η πιθανότητα αν, στη συνέχεια, μετρήσουμε την προβολή της στον άξονα z να βρούμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα;

Άσκηση 17 (*)

Το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί ένα σωμάτιο στη γειτονιά της στερεάς γωνίας $\Omega(\theta,\varphi)$ είναι:

$$\psi(\theta,\varphi) = N\left(1 - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\varphi + \sqrt{3}\cos\theta\right)$$

όπου N σταθερά κανονικοποίησης. Βρείτε : **(α)** Την πιθανότητα να έχει στροφορμή $l=0$, $l=1$ ή $l=2$. **(β)** Μετράτε την προβολή της στροφορμής στον άξονα z. Ποιά τα δυνατά αποτελέσματα και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες; **(γ)** Μετράτε την προβολή της στροφορμής στον άξονα x. Ποιά τα δυνατά αποτελέσματα και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες;

Δίνεται ότι $\Upsilon_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ \Upsilon_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta,\ \Upsilon_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta,\ \Upsilon_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

Απ. : Γράψτε $\psi(\theta,\varphi)=N\left(\sqrt{4\pi}\Upsilon_0^0+\sqrt{8\pi}\Upsilon_1^1+\sqrt{4\pi}\Upsilon_1^0-\sqrt{8\pi}\Upsilon_1^{-1}\right)$. Απαιτώντας η συνάρτηση να είναι κανονικοποιημένη θα βρείτε $N=\dfrac{1}{\sqrt{24\pi}}$. Έτσι θα απαντήσετε αμέσως στο (α). Για το (β) πρέπει να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 15.

Άσκηση 18 **(*)**

Το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί ένα σωμάτιο στη γειτονιά της στερεάς γωνίας $\Omega(\theta,\varphi)$ είναι:

$$\psi(\theta,\varphi)=N(\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+2\cos\theta).$$

Βρείτε : **(α)** Την πιθανότητα να έχει στροφορμή $l=0$, $l=1$ ή $l=2$. **(β)** Μετράτε την προβολή της στροφορμής στον άξονα z. Ποιά τα δυνατά αποτελέσματα και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες; **(γ)** Μετράτε την προβολή της στροφορμής στον άξονα y. Ποιά τα δυνατά αποτελέσματα και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες;

Άσκηση 19. **(*)**

Σωμάτιο έχει στροφορμή $l=3$ και βρίσκεται σε μια τυχαία κατάσταση (όχι κατ' ανάγκη σε ιδιοκατάσταση του $\hat{L}_z$). Δείξτε ότι αν $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα σε μια τυχαία κατεύθυνση:

(α) $\left\langle \vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}\right\rangle \equiv \left\langle \hat{L}_n\right\rangle \le 3\hbar$ **(β)** $\left\langle \hat{L}_x\right\rangle+\left\langle \hat{L}_y\right\rangle+\left\langle \hat{L}_z\right\rangle \le 3\sqrt{3}\hbar$

Υπ.: Θυμηθείτε ότι η μέση τιμή ενός μεγέθους είναι πάντα μικρότερη ή το πολύ ίση με τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το μέγεθος αυτό.

<u>Άσκηση 20.</u> (βοήθημα θεωρίας)

Έστω $\left|+\right\rangle$ και $\left|-\right\rangle$ η βάση που συγκροτούν οι (κοινές) ιδιοκαταστάσεις των τελεστών $\hat{\vec{S}}^2$ και $\hat{S}_z$ ενός σωματίου με spin $1/2$. Να βρείτε την αναπαράσταση των τελεστών $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ και $\hat{S}_z$ στη βάση αυτή. Στην ίδια βάση να βρεθεί η αναπαράσταση του τελεστή των στροφών.

<u>Απάντηση.</u>

Η βάση για την οποία συζητάμε απαρτίζεται από τα ανύσματα

$$\left|+\right\rangle \equiv \left|s=\frac{1}{2}, m_s=+\frac{1}{2}\right\rangle \;,\; \left|-\right\rangle \equiv \left|s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\right\rangle \tag{1}$$

τα οποία προσδιορίζονται από τις εξισώσεις

$$\hat{S}_z\left|\pm\right\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\left|\pm\right\rangle \;\text{ και }\; \hat{\vec{S}}^2\left|\pm\right\rangle = \hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\left|\pm\right\rangle \tag{2}$$

Η αναπαράσταση του τελεστή $\hat{S}_z$ στη βάση αυτή είναι πολύ εύκολο να βρεθεί:

$$\hat{S}_z \doteq \begin{pmatrix} \left\langle+\right|\hat{S}_z\left|+\right\rangle & \left\langle+\right|\hat{S}_z\left|-\right\rangle \\ \left\langle-\right|\hat{S}_z\left|+\right\rangle & \left\langle-\right|\hat{S}_z\left|-\right\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_z \tag{3}$$

Για την αναπαράσταση των τελεστών $\hat{S}_x$ και $\hat{S}_y$ θα πρέπει πρώτα να γράψουμε

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \;\text{ και }\; \hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)$$

και αφού παρατηρήσουμε ότι

$$\hat{S}_+\left|+\right\rangle = \hat{S}_-\left|-\right\rangle = 0 \;,\; \hat{S}_+\left|-\right\rangle = \hbar\left|+\right\rangle \;,\; \hat{S}_-\left|+\right\rangle = \hbar\left|-\right\rangle \tag{4}$$

να βρούμε:

$$\hat{S}_y \doteq \begin{pmatrix} \langle + | \hat{S}_y | + \rangle & \langle + | \hat{S}_y | - \rangle \\ \langle - | \hat{S}_y | + \rangle & \langle - | \hat{S}_y | - \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_y \qquad (5)$$

$$\hat{S}_x \doteq \begin{pmatrix} \langle + | \hat{S}_x | + \rangle & \langle + | \hat{S}_x | - \rangle \\ \langle - | \hat{S}_x | + \rangle & \langle - | \hat{S}_x | - \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \sigma_x \qquad (6)$$

Οι τρεις 2×2 πίνακες

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

ονομάζονται **πίνακες του Pauli** και έχουν ορισμένες ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες και οι οποίες μπορούν να διαπιστωθούν αμέσως:

$$\left\{ \sigma_i, \sigma_j \right\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,\; \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x, \ldots \qquad (8)$$

$$\left[\sigma_x, \sigma_y \right] = 2i\sigma_z \Rightarrow \sigma_x \sigma_y = i\sigma_z, \qquad \text{+ κυκλικές εναλλαγές} \qquad (9)$$

$$\det(\sigma_i) = -1 \;,\; tr(\sigma_i) = 0 \qquad (10)$$

Μπορούμε επίσης να δείξουμε πολύ εύκολα την ταυτότητα:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (11)$$

όπου $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τυχαία ανύσματα του τριδιάστατου χώρου.

Πράγματι:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \right) + \sigma_x \sigma_y \left(a_x b_y - a_y b_x \right) +$$

$$+ \sigma_y \sigma_z \left(a_y b_z - a_z b_y \right) + \sigma_z \sigma_x \left(a_z b_x - a_x b_z \right) =$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b} + i\sigma_z\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_z + i\sigma_x\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_x + i\sigma_y\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_y = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

Πριν προχωρήσουμε ας κάνουμε μερικές επισημάνσεις:

• Στη βάση που συζητάμε τα ίδια τα ανύσματα της βάσης μπορούν να αναπαρασταθούν με τις στήλες (ή γραμμές):

$$\left|+\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \left\langle + \middle| + \right\rangle \\ \left\langle - \middle| + \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+ \quad \text{και} \quad \left|-\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \left\langle + \middle| - \right\rangle \\ \left\langle - \middle| - \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_- \qquad (12)$$

$$\left\langle +\right| \doteq \left(\left\langle + \middle| + \right\rangle, \left\langle - \middle| + \right\rangle\right) = \left(1,0\right) \equiv \chi_+^\dagger \quad , \quad \left\langle -\right| \doteq \left(\left\langle + \middle| - \right\rangle, \left\langle - \middle| - \right\rangle\right) = \left(0,1\right) \equiv \chi_-^\dagger \qquad (13)$$

Ένα τυχαίο καταστατικό άνυσμα μπορεί να αναπαρασταθεί με μια στήλη που αναφέρεται ως **spinor με δύο συνιστώσες**:

$$\left|\alpha\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \left\langle + \middle| \alpha \right\rangle \\ \left\langle - \middle| \alpha \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \equiv \chi = c_+\chi_+ + c_-\chi_- \qquad (14)$$

$$\left\langle \alpha\right| \doteq \left(\left\langle + \middle| \alpha \right\rangle, \left\langle - \middle| \alpha \right\rangle\right) = \left(c_+^*, c_-^*\right) \equiv \chi^\dagger = c_+^*\chi_+^\dagger + c_-^*\chi_-^\dagger \qquad (15)$$

Ο όρος «spinor**»** θα διευκρινιστεί στη συνέχεια.

• Όπως είναι γνωστό αν διαθέτουμε μια βάση $\left\{\left|\alpha\right\rangle\right\}$ μπορούμε, με τη χρήση της σχέσης πληρότητας $\sum_\alpha \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| = \hat{I}$, να γράψουμε για οποιονδήποτε τελεστή:

$$\hat{A} = \sum_{\alpha,\alpha'} \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right|\hat{A}\left|\alpha'\right\rangle\left\langle\alpha'\right| \qquad (16)$$

Αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση για τους τελεστές $\hat{S}_k$ και τη βάση (1), θα βρούμε

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\big(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\big)\ ,\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2i}\big(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\big)\ ,\ \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\big(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\big) \qquad (17)$$

• Παρά τον συμβολισμό στη σχέση (11) οι πίνακες σ_k δεν συμπεριφέρονται ως συνιστώσες ανύσματος: Σε μια στροφή του συστήματος δεν αλλάζουν.

Όπως έχουμε δει ως άνυσμα συμπεριφέρεται η αναμενόμενη τιμή

$$\langle\alpha|\hat{S}_k|\alpha\rangle \underset{(15)}{=} \frac{\hbar}{2}\chi^\dagger\sigma_k\chi \qquad (18)$$

και επομένως είναι η ποσότητα $\chi^\dagger\vec{\sigma}\chi$ η οποία συμπεριφέρεται ως άνυσμα όταν το σύστημά μας στρέφεται.

Μπορούμε τώρα να δούμε την αναπαράσταση του τελεστή των στροφών

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\vec{S}\right) \qquad (19)$$

Από τις σχέσεις (3), (5) και (6) είναι προφανές ότι:

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi) \doteq \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) \qquad (20)$$

Αν αναπτύξουμε το εκθετικό θα πάρουμε

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi) \doteq \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-i)^p}{p!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^p\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^p \qquad (21)$$

Από τη σχέση (11) βλέπουμε ότι

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^2=\vec{n}^2=1 \qquad (22)$$

και επομένως

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)^p=\begin{cases}1 & \text{αν } p=2k\\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} & \text{αν } p=2k+1\end{cases} \qquad (23)$$

Μετά την (23) η σχ. (21) παίρνει τη μορφή:

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi)\doteq 1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2k}-i\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{2k+1}=$$

$$=1\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (24)$$

Αν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε τις σχ. (7) μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{D}(\vec{n},\varphi)\doteq\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-in_z\sin\frac{\varphi}{2} & -(in_x+n_y)\sin\frac{\varphi}{2}\\ -(in_x-n_y)\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}+in_z\sin\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} \qquad (25)$$

Μπορούμε τώρα να διευκρινήσουμε την έννοια του όρου spinor με δύο συνιστώσες:

Είναι μια ποσότητα χ με δύο συνιστώσες (όπως φαίνεται στη σχέση (14)) η οποία όταν το φυσικό σύστημα στραφεί κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα $\vec{n}$ θα αλλάξει με τον πίνακα (25):

$$\begin{pmatrix}c'_+\\ c'_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-in_z\sin\frac{\varphi}{2} & -(in_x+n_y)\sin\frac{\varphi}{2}\\ -(in_x-n_y)\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}+in_z\sin\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_+\\ c_-\end{pmatrix} \qquad (26)$$

Μια πολύ σημαντική (και πειραματικά ελέγξιμη) συνέπεια της παραπάνω ανάλυσης φαίνεται από τις προηγούμενες σχέσεις:

$$\hat{D}(\vec{n},2\pi) \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι αν το σύστημά μας –το οποίο ας πούμε ότι περιγράφεται από το άνυσμα $|\alpha\rangle$ -στραφεί κατά γωνία 2π γύρω από οποιαδήποτε κατεύθυνση δεν θα επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση: Θα περιγράφεται από την κατάσταση $-|\alpha\rangle$.

• Σαν εφαρμογή θα χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για να βρούμε τα ιδιοανύσματα των τελεστών $\hat{S}_x, \hat{S}_y$.

Έτσι τα ανύσματα $\hat{S}_x\left|s_x = \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\left|s_x = \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ μπορούν να βρεθούν αν στρέψουμε τα $|\pm\rangle$ γύρω από τον άξονα y κατά $\pm\pi/2$:

$$\left|s_x = \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \hat{D}(\vec{y},\pm\frac{\pi}{2})|\pm\rangle = \exp\left(\mp\frac{i\pi}{\hbar 2}\hat{S}_y\right)|\pm\rangle \doteq \exp\left(\mp\frac{i\pi}{4}\sigma_2\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ \pm 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \tag{28}$$

Τα ανύσματα $\hat{S}_y\left|s_y = \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\left|s_y = \pm\frac{1}{2}\right\rangle$ θα βρεθούν αν στρέψουμε τα $|\pm\rangle$ γύρω από τον άξονα x κατά γωνία $\mp\pi/2$:

$$\left|s_y = \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \hat{D}(\vec{x},\mp\frac{\pi}{2})|\pm\rangle = \exp\left(\pm\frac{i\pi}{\hbar 2}\hat{S}_x\right)|\pm\rangle \doteq \exp\left(\pm\frac{i\pi}{4}\sigma_1\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \pm i\\ \pm i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm i\end{pmatrix} \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right) \tag{29}$$

<u>Βοήθημα θεωρίας.</u>

Ο χώρος των θέσεων και ο χώρος του spin.

Ας ονομάσουμε S τον απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο Hilbert ο οποίος καλύπτεται πλήρως από τα ιδιοανύσματα του τελεστή της θέσης που αποτελούν ένα πλήρες και ορθοκανονικό σύνολο:

$$\left\langle \vec{r} \middle| \vec{r}' \right\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}'), \ \int d^3 r \left| \vec{r} \right\rangle \left\langle \vec{r} \right| = \hat{I} \qquad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε άνυσμα του χώρου S μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των εν λόγω ιδιοανυσμάτων:

$$\left|\psi\right\rangle = \int d^3 r \left| \vec{r} \right\rangle \left\langle \vec{r} \middle| \psi \right\rangle = \int d^3 r \left| \vec{r} \right\rangle \psi(\vec{r}) \qquad (2)$$

Στο πλαίσιο της Κβαντικής Μηχανικής η συνάρτηση $\psi(\vec{r})$ είναι το πλάτος πιθανότητας ένα σωμάτιο να βρεθεί στη γειτονιά σημείου με συντεταγμένες $\vec{r} = (x, y, z)$

Όταν ένα σωμάτιο έχει και spin έχει και επιπλέον «*βαθμούς ελευθερίας*». Χρειάζονται, δηλαδή, επιπλέον πληροφορίες ώστε να προσδιορίσουμε πλήρως την κατάστασή του.

Για να περιγράψουμε μαθηματικά αυτήν την (φυσική) πραγματικότητα κάνουμε δύο βήματα.

Πρώτα θεωρούμε και έναν άλλο, ***διαφορετικό***, διανυσματικό χώρο S_I ο οποίος καλύπτεται πλήρως από τις ιδιοκαταστάσεις $\left|s,m\right\rangle$ των $\hat{\vec{S}}^2$ και $\hat{S}_z$. Για δεδομένο spin s υπάρχουν $2s+1$ τέτοιες καταστάσεις και επομένως ο χώρος S_I έχει $2s+1$ διαστάσεις.

Τα διανύσματα $\left|s,m\right\rangle$ αποτελούν πλήρες και ορθοκανονικό σύνολο στον χώρο αυτό:

$$\left\langle s,m \middle| s,m' \right\rangle = \delta_{mm'} \ , \ \sum_{m=-s}^{s} \left|s,m\right\rangle \left\langle s,m' \right| = \hat{I} \qquad (3)$$

Έτσι ένα τυχαίο στοιχείο του S_I γράφεται :

$$\left|\chi\right\rangle = \sum_{m=-s}^{s} \left|s,m\right\rangle \left\langle s,m \middle| \chi \right\rangle = \sum_{m=-s}^{s} \left|s,m\right\rangle a_m \qquad (4)$$

Οι συντελεστές a_m αντιστοιχούν στο πλάτος πιθανότητας η προβολή του spin στον τρίτο άξονα να έχει την τιμή $\hbar m$.

Το δεύτερο βήμα είναι να ορίσουμε το λεγόμενο ***ευθύ γινόμενο*** (direct product) ανυσμάτων των χώρων S και S_I

$$\left|\Psi\right\rangle \equiv \left|\psi\right\rangle \otimes \left|\chi\right\rangle = \left|\chi\right\rangle \otimes \left|\psi\right\rangle \tag{5}$$

(συχνά γράφουμε απλώς : $\left|\Psi\right\rangle \equiv \left|\psi\right\rangle \left|\chi\right\rangle = \left|\chi\right\rangle \left|\psi\right\rangle$)

Είναι τώρα προφανές ότι το σύνολο των στοιχείων (5) συγκροτούν έναν νέο διανυσματικο χώρο οι διαστάσεις του οποίου είναι το γινόμενο των διαστάσεων των δύο χώρων S και S_I : Για να προσδιορίσετε οποιοδήποτε στοιχείο του χρειάζεστε όλες τις τιμές $\{\psi(\vec{r})\}$ και για κάθε μία απ' αυτές όλες τις τιμές $\{a_m\}$.

Ο «μεγαλύτερος» χώρος που φτιάξαμε συμβολίζεται

$$\tilde{S} = S \otimes S_I \tag{6}$$

και λέγεται ***ευθύ γινόμενο*** των επιμέρους χώρων.

Θα συμφωνήσουμε ότι η ***κατάσταση ενός σωματιδίου spin αντιστοιχεί στα διανύσματα του χώρου*** $\tilde{S}$. Θα το καταλάβετε αυτό αν σκεφτείτε ότι για ένα τέτοιο σωματίδιο δεν επαρκεί η συνάρτηση $\psi(\vec{r})$ για να προσδιορίσετε πλήρως την κατασταση του. Χρειάζεστε και τους συντελεστές a_m δηλαδή τα πλάτη πιθανότητας αν μετρηθεί η προβολή του spin να βρεθεί η τιμή $\hbar m$.

Η βάση στο χώρο $\tilde{S}$ πρέπει να κατασκευαστεί, φυσικά, με τον κανόνα (5).

Ας πάρουμε για παράδειγμα (το οποίο μπορεί να γενικευτεί άμεσα) την περίπτωση $s = 1/2$. Στην περίπτωση αυτή βάση στη χώρο S_I μπορούν να είναι τα

$$\left|s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right\rangle \equiv \left|+\right\rangle, \left|s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv \left|-\right\rangle \tag{7}$$

Έτσι η βάση στο χώρο $\tilde{S}$ θα είναι τα

$$\left|\vec{r},1\right\rangle \equiv \left|\vec{r}\right\rangle \left|+\right\rangle \text{ και } \left|\vec{r},2\right\rangle \equiv \left|\vec{r}\right\rangle \left|-\right\rangle \tag{8}$$

Η βάση αυτή θα είναι πλήρης και ορθοκανονική:

$$\langle \vec{r},\sigma | \vec{r}',\sigma' \rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta_{\sigma\sigma'} \ , \ \sum_{\sigma} \int d^3r \, | \vec{r},\sigma \rangle \langle \vec{r},\sigma | = \hat{I} \quad (\sigma = 1,2) \tag{9}$$

Χρησιμοποιώντας τη βάση (9) μπορούμε να γράψουμε:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d^3r \, |\vec{r},\sigma\rangle \langle \vec{r},\sigma | \Psi \rangle \tag{10}$$

Οι συντελεστές στο ανάπτυγμα αυτό είναι:

$$\langle \vec{r},1 | \Psi \rangle = \langle \vec{r} | \langle + | \chi \rangle | \psi \rangle = a_{+}\psi(\vec{r}) \, , \ \langle \vec{r},2 | \Psi \rangle = \langle \vec{r} | \langle - | \chi \rangle | \psi \rangle = a_{-}\psi(\vec{r}) \tag{11}$$

Όπου $a_{\pm} = \langle \pm | \chi \rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το σωμάτιο να βρεθεί πολωμένο στη θετική (ή την αρνητική) διεύθυνση του άξονα z.

Συνδυάζοντας τις (10) και (11) γράφουμε:

$$|\Psi\rangle = \int d^3r \, |\vec{r}\rangle \left(a_{+} |+\rangle + a_{-} |-\rangle \right) \psi(\vec{r}) \doteq \int d^3r \, |\vec{r}\rangle \begin{pmatrix} a_{+} \\ a_{-} \end{pmatrix} \psi(\vec{r}) \tag{12}$$

Στο τελευταίο βήμα αναπαραστήσαμε: $|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Μετά την προηγούμενη ανάλυση είναι φανερό ότι ένα σωμάτιο με spin δεν αντιπροσωπεύεται από μια συνηθισμένη συνάρτηση αλλά από εναν spinor:

$$\begin{pmatrix} \psi_{+}(\vec{r}) \\ \psi_{-}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{+} \\ a_{-} \end{pmatrix} \psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_{+}\psi(\vec{r}) \\ a_{-}\psi(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{13}$$

<u>Άσκηση 21.</u>

Έστω σωμάτιο με spin $1/2$ και $\vec{n}$ μοναδιαίο άνυσμα σε τυχαία κατεύθυνση.

(α) Να βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}$ με ιδιοτιμές $\pm\frac{\hbar}{2}$.

(β) Έστω τώρα ότι το σωμάτιο βρίσκεται σε κάποια από αυτές τις ιδιοκαταστάσεις.

Προσδιορίστε την πιθανότητα σε μια μέτρηση της προβολής του spin στον άξονα z να βρούμε $\pm\frac{\hbar}{2}$.

Απάντηση

(α) Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί με περισσότερους από έναν τρόπους.

Ένας από αυτούς είναι με την απευθείας κατασκευή των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή $\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}$. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας ότι το μοναδιαίο άνυσμα σχηματίζει γωνία β με τον άξονα z και ότι η πολική του γωνία είναι α:

$$\vec{n}=\vec{x}\cos\alpha\sin\beta+\vec{y}\sin\alpha\sin\beta+\vec{z}\cos\beta \qquad (1)$$

Επομένως ο τελεστής $\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}\doteq\frac{\hbar}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}=\frac{\hbar}{2}\cos\alpha\sin\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\sin\alpha\sin\beta\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}+\frac{\hbar}{2}\cos\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta\\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Έτσι, το πρόβλημά μας είναι ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών και των ιδιοανυσμάτων του πίνακα που εμφανίστηκε στην τελευταία σχέση :

$$\begin{pmatrix}\cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta\\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Για να έχει λύση το σύστημα (3) θα πρέπει

$$\det\begin{pmatrix} \cos\beta-\lambda & e^{-i\alpha}\sin\beta \\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta-\lambda \end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\pm 1 \tag{4}$$

Για $\lambda=1$ μπορούμε αμέσως να βρούμε ότι $b=a\tan(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha}$ και επομένως το αντίστοιχο ιδιοάνυσμα είναι

$$\varphi_{+}=a\begin{pmatrix} 1 \\ \tan(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Η σταθερά κανονικοποιήσης θα βρεθεί από την

$$\varphi_{+}^{\dagger}\varphi_{+}=1 \quad\Rightarrow\quad |a|^2=\cos^2(\frac{\beta}{2})$$

και επομένως (και με τη συνήθη αυθαιρεσία σε ό,τι αφορά στη φάση) βρίσκουμε

$$\varphi_{+}=\begin{pmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) \\ \sin(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha} \end{pmatrix}=\cos(\frac{\beta}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\sin(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\cos(\frac{\beta}{2})\chi_{+}+\sin(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha}\chi_{-} \tag{6}$$

Το καταστατικό άνυσμα το οποίο αντιπροσωπεύεται από την (6) είναι

$$|\varphi_{+}\rangle=\cos(\frac{\beta}{2})|+\rangle+\sin(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha}|-\rangle \tag{7}$$

και μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι

$$\vec{n} \cdot \hat{\vec{S}} \left| \varphi_+ \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left| \varphi_+ \right\rangle \qquad (8)$$

Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για την ιδιοτιμή $\lambda = -1$ θα πάρουμε το άνυσμα

$$\left| \varphi_- \right\rangle = \sin(\frac{\beta}{2}) \left| + \right\rangle - \cos(\frac{\beta}{2}) e^{i\alpha} \left| - \right\rangle \qquad (9)$$

για το οποίο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\vec{n} \cdot \hat{\vec{S}} \left| \varphi_- \right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \left| \varphi_- \right\rangle \qquad (10)$$

Στα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε και με άλλο τρόπο : Μπορούμε να στρέψουμε το άνυσμα $\left| + \right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και να το φέρουμε στη διεύθυνση που ορίζει το μοναδιαίο άνυσμα $\vec{n}$. Είναι τότε προφανές ότι το άνυσμα $\left| \varphi_+ \right\rangle$ που θα προκύψει θα πρέπει να είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή $\vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$ με ιδιοτιμή $\hbar / 2$.

Η απαιτούμενη στροφή θα πραγματοποιηθεί αν πρώτα κάνουμε μια στροφή κατά γωνία β γύρω από τον άξονα y και στη συνέχεια μια στροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα z :

$$\left| \varphi_+ \right\rangle = \hat{D}(\vec{z}, \alpha) \hat{D}(\vec{y}, \beta) \left| + \right\rangle \doteq \exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3) \exp(-i\frac{\beta}{2}\sigma_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\cos(\frac{\alpha}{2}) - i\sigma_3 \sin(\frac{\alpha}{2}) \right] \left[\cos(\frac{\beta}{2}) - i\sigma_2 \sin(\frac{\beta}{2}) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) - i\sin(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\alpha}{2}) + i\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\beta}{2}) & -\sin(\frac{\beta}{2}) \\ \sin(\frac{\beta}{2}) & \cos(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\frac{\beta}{2}) \\ e^{i\alpha/2} \sin(\frac{\beta}{2}) \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα (πέρα από μια φάση) συμπίπτει, όπως θα περιμέναμε, με το αποτέλεσμα (6) .Για να βρούμε το ιδιοάνυσμα $\left|\varphi_-\right\rangle$ δεν έχουμε παρά να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία με τη γωνία β να αντικαθίσταται από τη γωνία $\beta - \pi$.

(β) Όπως κι αν απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα μπορούμε να δούμε αμέσως ότι αν το σύστημά μας βρίσκεται σε κάποια από τις καταστάσεις $\left|\varphi_\pm\right\rangle$,

η πιθανότητα σε μια μέτρηση της προβολής του spin στον άξονα z να βρούμε $\pm\hbar/2$

είναι :

$$\begin{aligned} \left|\left\langle + \middle| \varphi_+ \right\rangle\right|^2 &= \cos^2(\frac{\beta}{2}) \quad , \quad \left|\left\langle - \middle| \varphi_+ \right\rangle\right|^2 = \sin^2(\frac{\beta}{2}) \\ \left|\left\langle + \middle| \varphi_- \right\rangle\right|^2 &= \sin^2(\frac{\beta}{2}) \quad , \quad \left|\left\langle - \middle| \varphi_- \right\rangle\right|^2 = \cos^2(\frac{\beta}{2}) \end{aligned} \qquad (12)$$

Άσκηση 22. **(*)**

Ένα σωμάτιο με spin $1/2$ βρίσκεται σε κατάσταση η οποία είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή $\hat{S}_z$ με ιδιοτιμή $\frac{\hbar}{2}$. Ποια είναι η πιθανότητα να βρούμε $\pm\frac{\hbar}{2}$ αν μετρήσουμε την προβολή του spin σε μια τυχαία κατεύθυνση $\vec{n}$;

(Υπ.: Την απάντηση την βρήκατε ήδη στην προηγούμενη άσκηση)

Άσκηση 23. **(*)**

Ένα σωμάτιο με spin $1/2$ βρίσκεται στην κατάσταση

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle$$

Σε ποιες χωρικές κατευθύνσεις η προβολή του spin έχει αβεβαιότητα μηδέν ;

Υπ.: Αυτό το οποίο ψάχνετε είναι η διεύθυνση $\vec{n}$ για την οποία το άνυσμα $|\chi\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή $\hat{S}_n \equiv \vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}$.
Πράγματι. Σε μια τέτοια κατεύθυνση θα έχετε :

$$\left(\Delta S_n\right)^2 = \langle \chi \,|\, \hat{S}_n^2 \,|\, \chi \rangle - \langle \chi \,|\, \hat{S}_n \,|\, \chi \rangle^2 = 0$$

Γράψτε $\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}} \doteq \frac{\hbar}{2} n_x \sigma_x + \frac{\hbar}{2} n_y \sigma_y + \frac{\hbar}{2} n_z \sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & n_z \end{pmatrix}$ και λύστε την εξίσωση

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 \end{pmatrix} = \varepsilon\,\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2 \end{pmatrix} \quad \left(\varepsilon = \pm 1\right)$$

θα βρείτε

$$n_x = n_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\; n_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Άσκηση 24.

Έστω σωμάτιο με spin $1/2$. Να προσδιορίσετε την κατάστασή του αν είναι γνωστές οι $\left\langle \hat{S}_x \right\rangle$, $\left\langle \hat{S}_z \right\rangle$ και μόνο το πρόσημο της $\left\langle \hat{S}_y \right\rangle$.

Απ. : Αυτό που πρέπει να βρούμε είναι οι συντελεστές στο ανάπτυγμα

$$\left|\psi\right\rangle = \alpha\left|+\right\rangle + \beta\left|-\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad , \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{1}$$

Επειδή μια συνολική φάση στην έκφραση (1) δεν έχει καμμία μετρήσιμη επίδραση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\alpha \geq 0$.

(Γενικά $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi_\alpha}$ και $\beta = |\beta| e^{i\varphi_\beta}$ και επομένως

$\left|\psi\right\rangle = |\alpha| e^{i\varphi_\alpha} \left|+\right\rangle + |\beta| e^{i\varphi_\beta} \left|-\right\rangle = e^{i\varphi_\alpha}\left(|\alpha|\left|+\right\rangle + |\beta| e^{i(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}\left|-\right\rangle\right) \to |\alpha|\left|+\right\rangle + |\beta| e^{i(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}\left|-\right\rangle$)

Επομένως
$$\alpha = \sqrt{1 - |\beta|^2} \tag{2}$$

Οι άλλες πληροφορίες που έχουμε είναι ότι

$$\left\langle \hat{S}_x \right\rangle = \left\langle \psi \right| \hat{S}_x \left| \psi \right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\alpha^* \beta + \alpha \beta^*) = \frac{\hbar}{2} c_x \tag{3}$$

και

$$\left\langle \hat{S}_z \right\rangle = \left\langle \psi \right| \hat{S}_z \left| \psi \right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2) = \frac{\hbar}{2} c_z \tag{4}$$

Από τις εξ. (2) και (4) θα πάρουμε :

$$1 - 2|\beta|^2 = c_z \Rightarrow |\beta| = \sqrt{\frac{1 - c_z}{2}} \text{ και } \alpha = \sqrt{\frac{1 + c_z}{2}} \tag{5}$$

Από τη σχέση (3) θα έχουμε ότι

$$\alpha(\beta + \beta^*) = c_x \quad \Rightarrow \quad \alpha|\beta|(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\alpha|\beta|\cos\theta = c_x$$

και επομένως
$$\cos\theta = \frac{c_x}{2\alpha|\beta|} = \frac{c_x}{\sqrt{1 - c_z^2}} \qquad \beta = |\beta| e^{i\theta} \tag{6}$$

Επειδή $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$ η εξίσωση (6) δεν αρκεί για τον πλήρη προσδιορισμό της φάσης του μιγαδικού αριθμού β. Η πληροφορία που χρειαζόμαστε επιπλέον είνα

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle = \ \left\langle \psi \left| \hat{S}_y \right| \psi \right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2i}(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*) = \frac{\hbar}{2i}\alpha(\beta - \beta^*) = \hbar\alpha\left|\beta\right|\sin\theta$$

(7)

Η τελευταία σχέση προσδιορίζει αν η γωνία θ βρίσκεται στο διάστημα $(0,\pi)$ ή στο

διάστημα $(\pi, 2\pi)$ και επομένως συνδυαζόμενη με την (7) θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Προσέξτε οτι οι πληροφορίες που χρειάζεστε για να προσδιορίσετε την επαλληλία (1): Δεν αρκεί να μετρήσετε το φυσικό μέγεθος τις ιδιοακαταστάσεις του οποίου χρησιμοποιήσατε ως βάση *(έτσι θα βρείτε μόνο τα μέτρα των συντελεστών όπως είναι προφανέ ςαπό την (5))* ***αλλά πρέπει να μετρήσετε και μεγέθη τα οποία αντιπροσωπεύονται από τελεστές οι οποίοι δεν μετατίθενται με τον τελεστή τις ιδιοκαταστάσεις του οποίου χρησιμοποιήσατε.***

<u>Άσκηση 25.</u> (*)

Ένα σωμάτιο με spin $1/2$ και φορτίο $e(<0)$ βρίσκεται υπό την επίδραση ομογενούς μαγνητικού πεδίου στη διεύθυνση $\vec{n}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωμάτιο βρίσκεται στην κατάσταση $\left|\psi\right\rangle_0 = \alpha\left|+\right\rangle + \beta\left|-\right\rangle$. $\left(\left|\pm\right\rangle \text{ ιδιοακαταστάσεις του } \hat{S}_z\right)$.

(α) Μετά από χρόνο $t>0$ μετράτε την προβολή του spin στον άξονα x. Ποιά είναι η πιθανότητα να βρείτε $+\hbar/2$ και ποιά $-\hbar/2$;

(β) Ας πούμε ότι στην προηγούμενη μέτρηση βρήκατε $+\hbar/2$. Ποιά είναι η πιθανότητα αν μετά από χρόνο $t'>t$ ξαναμετρήσετε την προβολή του spin στον άξονα x να βρείτε και πάλι $+\hbar/2$;

Υπ.:

Ξεκινείστε από Hamiltonian που περιγράφει την αλληλεπίδραση του spin του σωματιδίου με το μαγνητικό πεδίο: $\hat{H} = \frac{|e|}{mc}\vec{B}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{|e|B}{mc}\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}} \equiv \omega\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}$

όπου $B = \left|\vec{B}\right|$, $\vec{n} = \frac{\vec{B}}{B}$ και $\omega = \frac{|e|B}{mc}$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ η κατάσταση του σωματίου είναι η

$$\left|\psi\right\rangle_0 = \alpha\left|+\right\rangle + \beta\left|-\right\rangle \doteq \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

και η χρονική της εξέλιξη θα γίνει μέσω του τελεστή

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t\omega \hat{S}_n\right) \doteq \exp\left(-\frac{i}{2} t\omega\sigma_n\right)$$

Δείξτε στη συνέχεια ότι

$$\hat{U}(t) \doteq \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} - in_z \sin\frac{\omega t}{2} & -(in_x + n_y)\sin\frac{\omega t}{2} \\ -(in_x - n_y)\sin\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2} + in_z \sin\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix}$$

Επομένως η κατάσταση του ηλεκτρονίου μετά από χρόνο t θα είναι

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega t}{2} - in_z \sin\frac{\omega t}{2} & -(in_x + n_y)\sin\frac{\omega t}{2} \\ -(in_x - n_y)\sin\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2} + in_z \sin\frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Αν τώρα θυμηθείτε τις ιδιοκαταστάσεις του $\hat{S}_x$ θα απαντήσετε αμέσως στο πρώτο από τα ερωτήματα. Η απάντηση στο δεύτερο θα δωθεί αν λάβετε υπόψη σας ότι μετά την μέτρηση ενός μεγέθους το σύστημά σας βρίσκετε σε ιδιοκατάσταση του μεγέθους αυτού.

Άσκηση 26. (*)

Θεωρείστε ένα ηλεκτρόνιο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\vec{z}$.

Το αποτέλεσμα μέτρησης τη χρονική στιγμή $t = 0$ έδειξε ότι το σωμάτιο βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του τελεστή $\hat{S}_x$ με ιδιοτιμή $\hbar/2$. Να βρείτε :

(α) Την πιθανότητα να βρεθεί μετά από χρόνο t σε ιδιοκατάσταση του $\hat{S}_x$ με ιδιοτιμή $\pm\hbar/2$.

(β) Την πιθανότητα να βρεθεί μετά από χρόνο t σε ιδιοκατάσταση του $\hat{S}_y$ με ιδιοτιμή $\pm\hbar/2$.

(γ) Την πιθανότητα να βρεθεί μετά από χρόνο t σε ιδιοκατάσταση του $\hat{S}_z$ με ιδιοτιμή $\pm\hbar/2$.

Υπ. Την απάντηση τη βρήκατε ήδη στη προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 27. (*)

Σωμάτιο έχει τροχιακή στροφορμή $l = 1$ και spin $1/2$.

(α) Έστω $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$. Μετράτε τα $\hat{J}^2$ και $\hat{J}_z$. Ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα;

(β) Βρείτε τις κοινές ιδιοκαταστάσεις των $\left(\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{L}^2, \hat{S}^2\right)$.

Απ.:

$$\hat{J}^2 \left| j,m \right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left| j,m \right\rangle \qquad \hat{J}_z \left| j,m \right\rangle = \hbar m \left| j,m \right\rangle$$
$$j = 3/2 \Rightarrow m = 3/2, 1/2, -1/2, -3/2 \qquad j = 1/2 \Rightarrow m = 1/2, -1/2$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left| 1, \frac{1}{2} \right\rangle, \ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle, \ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| -1, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 0, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| -1, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Άσκηση 28. (*)

Σωμάτιο έχει τροχιακή στροφορμή $l = 1$ και spin $1/2$.

(α) Μετράτε την προβολή της συνολικής στροφορμής $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ και του spin στον άξονα z και βρίσκετε $j_z = 1/2$ και $m = 1/2$. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές του μέτρου της συνολικής στροφορμής και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες;

(β) Μετράτε την προβολή της συνολικής στροφορμής $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ και του spin στον άξονα x και βρίσκετε $j_x = 1/2$ και $m_x = -1/2$. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές του μέτρου της συνολικής στροφορμής και ποιές οι αντίστοιχες πιθανότητες;

Υπ. :

(α) Παρατηρείστε από την προηγούμενη άσκηση ότι η δυνατότητα $j_z = 1/2$ και $m = 1/2$ παρουσιάζεται σε δύο περιπτώσεις :

$$\left| j = \frac{3}{2}, j_z = \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| l = 0, m = \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| l = 1, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{και}$$

$$\left| j=\frac{1}{2}, j_z=\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| l=1, m=-\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| l=0, m=\frac{1}{2} \right\rangle$$

Λύνοντας θα βρούμε

$$\left| l=0, m=\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| j=\frac{3}{2}, j_z=\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| j=\frac{1}{2}, j_z=\frac{1}{2} \right\rangle$$

και επομένως $\quad P(j=\frac{3}{2})=\frac{2}{3},\ P(j=\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$

(β) Για να απαντήσετε στο δεύτερο ερώτημα αρκεί να συνειδητοποιείσετε την ισοδυναμία των αξόνων z και x. Αν το κάνετε αυτό θα βρείτε όπως και πριν

$$\left| l=0, m=\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| j=\frac{3}{2}, j_z=\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| j=\frac{1}{2}, j_z=\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\left| l=1, m_x=-\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| j=\frac{1}{2}, j_x=\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| j=\frac{3}{2}, j_x=\frac{1}{2} \right\rangle$$

άρα $\quad P(j=\frac{3}{2})=\frac{1}{3},\ P(j=\frac{1}{2})=\frac{2}{3}$

Άσκηση 29. (*)

Ένα σύστημα 2 ηλεκτρονίων βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο προσανατολισμένο στον άξονα x. Θεωρείστε ότι η δυναμική του συστήματος καθορίζεται από την Hamiltonian :

$$\hat{H} = -\frac{e}{mc}\vec{B}\cdot\hat{\vec{S}} = -\frac{e}{mc}B(\hat{S}_{1x}+\hat{S}_{2x})$$

(α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση

$$\left|\psi\right\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|s=0, m=0\right\rangle + \frac{1+i}{2}\left|s=1, m=0\right\rangle$$

Εξηγείστε γιατί είναι 1 η πιθανότητα σε μια μέτρηση της προβολής του spin των σωματιδίων στον άξονα z, να βρείτε για το ένα τιμή $\hbar/2$ και για το άλλο $-\hbar/2$.

(β) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος μετά από χρόνο t και προσδιορίστε την πιθανότητα σε μια μέτρηση της προβολής του spin των σωματιδίων στον άξονα z, να βρείτε και για τα δύο τιμή $\hbar/2$.

Υπ.: Γράψτε $\left|0,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)$ και $\left|1,0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)$

Έτσι

$\left|\psi\right\rangle_0 = a\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - b\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ με $a = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right),\ b = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ και

αρα $\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|\left.\psi\right\rangle_0 = a$ και $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right|\left.\psi\right\rangle_0 = b$, $|a|^2+|b|^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

Στη συνέχεια γράψτε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης

$\hat{U} = \hat{U}_1\hat{U}_2 = e^{-\frac{i}{\hbar}t\omega\hat{S}_{1x}} e^{-\frac{i}{\hbar}t\omega\hat{S}_{1x}} \doteq e^{-i\frac{\omega t}{2}\sigma_{1x}} e^{-i\frac{\omega t}{2}\sigma_{2x}}$ και προχωρείστε παρατηρώντας ότι

$$\hat{U}_1\hat{U}_2\left|m_1,m_2\right\rangle = \left(\hat{U}_1\left|m_1\right\rangle\right)\left(\hat{U}_2\left|m_2\right\rangle\right)$$

Άσκηση 30.

Η δυναμική ενός συστήματος δύο σωματιδίων με spin $1/2$ περιγράφεται από την Hamiltonian

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{\alpha}{\hbar}(\hat{S}_{1z}+\hat{S}_{2z}) + \frac{4\beta}{\hbar^2}\hat{\vec{S}}_1\cdot\hat{\vec{S}}_2 .$$

Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ιδιοτιμές της Hamiltonian μέσω των ιδιοκαταστάσεων $\left|s_1,m_1;s_2,m_2\right\rangle$ των $\vec{S}_1^2,\vec{S}_2^2,S_{1z}$ και S_{2z}. Για ποιές τιμές του λόγου α/β παρουσιάζεται εκφυλισμός ;

Υπ. Δώστε στη Hamiltonian τη μορφή $\hat{\mathrm{H}} = \frac{\alpha}{\hbar}\hat{S}_z + \frac{2\beta}{\hbar^2}\left(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2\right)$ όπου $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$.

Παρατηρείστε στη συνέχεια ότι $\hat{\mathrm{H}}\left|s_1, s_2, s, m\right\rangle = \left[\alpha m + 2\beta\left(s(s+1) - \frac{3}{2}\right)\right]\left|s_1, s_2, s, m\right\rangle$

και εκφράστε τα $\left|s_1, s_2, s, m\right\rangle$ μέσω των $\left|s_1, m_1; s_2, m_2\right\rangle$.

Η ενέργεια των διαφόρων καταστάσεων είναι

$E_{1,1} = \alpha + \beta,\ E_{1,-1} = -\alpha + \beta,\ E_{1,0} = \beta,\ E_{0,0} = -3\beta$. Για $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ προφανώς δεν υπάρχει εκφυλισμός εκτός και αν $\alpha + \beta = -3\beta$ ή $-\alpha + \beta = -3\beta$ οπότε οι καταστάσεις $\left|1,1\right\rangle, \left|0,0\right\rangle$ ή $\left|1,-1\right\rangle, \left|0,0\right\rangle$ αντίστοιχα είναι εκφυλισμένες.

Για $\alpha \neq 0,\ \beta = 0$ οι καταστάσεις $\left|1,0\right\rangle$ και $\left|0,0\right\rangle$ είναι εκφυλισμένες . Για $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ οι καταστάσεις $\left|1,1\right\rangle,\ \left|1,0\right\rangle,\ \left|1,-1\right\rangle$ είναι εκφυλισμένες. Αρα εκφυλισμός υπάρχει για $\frac{\alpha}{\beta} = \pm 4, 0, \infty$.

Άσκηση 31.

Δύο μη αλληλεπιδρώντα σωμάτια βρίσκονται δεσμευμένα σε κάποιο δυναμικό και έχουν καθορισμένη ενέργεια. Θεωρείστε ότι το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο και γράψτε τη γενική μορφή που μπορεί να έχει η κυματοσυνάρτηση του συστήματος :

(α) Εάν τα σωμάτια είναι διακρίσιμα.
(β) Εάν είναι μη διακρίσιμα μποζόνια
(γ) Εάν είναι μη διακρίσιμα φερμιόνια
(δ) Επαναλάβετε τα ίδια εάν έχετε τρία σωμάτια.

Απ. **(α)** $\varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2)$ **(β)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2) + \varphi_{n_1}(x_2)\varphi_{n_2}(x_1)\right)$

(γ) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2) - \varphi_{n_1}(x_2)\varphi_{n_2}(x_1)\right)$ **(δ)** Για φερμιόνια :

$$\frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(\varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2)\varphi_{n_3}(x_3) - \varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_3)\varphi_{n_3}(x_2) - \varphi_{n_1}(x_2)\varphi_{n_2}(x_1)\varphi_{n_3}(x_3) +$$

$$+\varphi_{n_1}(x_2)\varphi_{n_2}(x_3)\varphi_{n_3}(x_1) + \varphi_{n_1}(x_3)\varphi_{n_2}(x_1)\varphi_{n_3}(x_2) - \varphi_{n_1}(x_3)\varphi_{n_2}(x_2)\varphi_{n_3}(x_1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{vmatrix} \varphi_{n_1}(x_1) & \varphi_{n_1}(x_2) & \varphi_{n_1}(x_3) \\ \varphi_{n_2}(x_1) & \varphi_{n_2}(x_2) & \varphi_{n_2}(x_3) \\ \varphi_{n_3}(x_1) & \varphi_{n_3}(x_2) & \varphi_{n_3}(x_3) \end{vmatrix}$$

. Το μυστικό της κατασκευής είναι ότι ξεκινάτε τον συνδυασμό $(1,2,3)$ και κάνετε όλες τις δυνατές μεταθέσεις βάζοντας ± 1 ανάλογα με τον αν χρειάζεστε άρτιο ή περιττό αριθμό βημάτων για να επανέλθετε στον αρχικό σας συνδυασμό.

Άσκηση 32. (*)
Για τα δύο σωμάτια της προηγούμενης άσκησης και για τις περιπτώσεις (α), (β) και (γ) υπολογίστε την ποσότητα $\left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle$.

Απ.:**(α)** $\left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle_{n_1 n_1} + \left\langle x^2 \right\rangle_{n_2 n_2} - 2\left\langle x \right\rangle_{n_1 n_1} \left\langle x \right\rangle_{n_2 n_2}$

(β) $\left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle_{bosons} = \left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle - 2\left|\left\langle x \right\rangle_{n_1 n_2}\right|^2$

(γ) $\left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle_{fermions} = \left\langle \left(x_1 - x_2\right)^2 \right\rangle + 2\left|\left\langle x \right\rangle_{n_1 n_2}\right|^2$

Όπου γράψαμε $\left\langle f(x) \right\rangle_{nm} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_n^*(x) f(x) \varphi_m(x)$

Άσκηση 33.(*)
Σωμάτιο βρίσκεται δεσμευμένο στο δυναμικό

$$V(\hat{x}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 g \hat{x}^2$$

(α) Λύστε το πρόβλημα ακριβώς .(Θεωρώντας τις ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή γνωστές όπως επίσης και το ενεργειακό φάσμα). Στη συνέχεια εξετάστε δύο περιπτώσεις: Την περίπτωση $g \ll 1$ και την περίπτωση $g \gg 1$. Βρείτε τη διόρθωση του ενεργειακού φάσματος σε προσέγγιση δεύτερης τάξης.

(Υπ.: Γράψτε $V(\hat{x}) = \frac{1}{2} m\varpi^2 \hat{x}^2$ με $\varpi = \sqrt{1+g}$.

Θα δείτε έτσι ότι $E_n = \hbar\varpi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1+g}$. Για την περίπτωση $g \ll 1$

χρησιμοποιείστε την $\sqrt{1+g} \simeq 1 + \frac{1}{2} g - \frac{1}{8} g^2 + \dots$. Στην δεύτερη περίπτωση γράψτε

$$\sqrt{1+g} = \sqrt{g}\sqrt{1+\frac{1}{g}} \simeq \sqrt{g}\left(1 + \frac{1}{2g} - \frac{1}{8g^2} + \dots\right))$$

(β) Να επαναλάβετε τον υπολογισμό με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών.
(Υπ.: Στην πρώτη περίπτωση ο δεύτερος όρος στο δυναμικό είναι η μικρή διαταραχή ενώ στη δεύτερη ο πρώτος. Θα χρειαστεί να υπολογίσετε όρους του τύπου $\left\langle n \middle| \hat{x}^2 \middle| k \right\rangle$.
Χρησιμοποιείστε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής και γράψτε
$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)$. Έτσι θα βρείτε ότι

$$\left\langle n \middle| \hat{x}^2 \middle| k \right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(\sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} - \left(2k+1\right)\delta_{n,k} + \sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-2}\right)$$

Άσκηση 34.(*)
Φορτισμένο σωμάτιο είναι δεσμευμένο σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή (σε μια διάσταση). Ταυτόχρονα τοποθετείται μέσα με ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E} = E\vec{e}_x$.
(α) Να βρείτε το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου.

(β) Να κάνετε τον ίδιο υπολογισμό στο πλαίσιο της θεωρίας διαταραχών και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Απ. Η Hamiltonian του σωματιδίου είναι : $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - qE\hat{x}$. Είναι γενικός κανόνας ότι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax^2 + bx$ πάντα μπορούν να γραφούν $f(x) = a(x - x_0)^2 - c^2$ για κατάλληλες τιμές των a και c. Με απλή σύγκριση θα διαπιστώσετε ότι $x_0 = -\frac{b}{2a}$ και $c^2 = \frac{b^2}{4a}$. Επομένως το δυναμικό σας γράφεται:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2} \equiv \tilde{V}(x - x_0) - c^2 .$$

Με την παρατήρηση αυτή η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schroendinger παίρνει τη μορφή:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x - x_0) - c^2\right]\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x)$$

Αν τώρα γράψουμε $y = x - x_0$ θα έχουμε:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \tilde{V}(y)\right]\tilde{\varphi}_n(y) = \tilde{E}_n\tilde{\varphi}_n(y)$$

όπου $\tilde{V}(y) = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$, $\tilde{\varphi}_n(y) = \varphi_n(y + x_0)$ και $\tilde{E}_n = E_n + c^2$.

Τη λύση στο πρόβλημα αυτό είναι γνωστή:

$$\tilde{\varphi}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}A_n\mathrm{H}_n(\frac{y}{\beta})\exp(-\frac{y^2}{2\beta^2}) \Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}A_n\mathrm{H}_n\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right)\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\beta^2}\right], \left(\beta^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\right)$$

Όπως είναι προφανές παριστάνει έναν ταλαντωτή το κέντρο ταλάντωσης του οποίου έχει μετατοπισθεί.

Για την ενέργεια έχουμε:

$$\tilde{E}_n = E_n + c^2 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}$$

Αυτή την τελευταία σχέση θα επιβεβαιώσετε μέσω της θεωρίας διαταραχών. Θα διαπιστώσετε ότι η μόνη μηδενική διόρθωση είναι αυτή της δεύτερης τάξης.

<u>Άσκηση 35.</u>(*)

Σωμάτιο βρίσκεται δεσμευμένο στο δυναμικό σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή σε δύο διαστάσεις:

$$V(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2$$

(α) Λύστε το πρόβλημα ακριβώς . Βρείτε τον εκφυλισμό κάθε ενεργειακού επιπέδου.

(β) Στο δυναμικό προστίθεται η αλληλεπίδραση $\hat{H}' = \lambda\hat{V} = \lambda m\omega^2\hat{x}\hat{y}$ όπου $\lambda \ll 1$.

Να βρείτε, σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών, τη μεταβολή των τριών πρώτων ενεργειακών επιπέδων.

(γ) Να λύσετε ακριβώς το πλήρες πρόβλημα και να συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση.

Απ.

(α) Η πρώτη ερώτηση μπορεί να απαντηθεί πολύ εύκολα αν προσέξετε ότι το πρόβλημα σας είναι ισοδύναμο με δύο ανεξάρτητους μονοδιάστατους ταλαντωτές οι οποίοι έχουν την ίδια συχνότητα. Έτσι θα ορίσετε τους τελεστές

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right),\ \hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}_x}{m\omega}\right)$$

$$\hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} + i\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right),\ \hat{a}_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{y} - i\frac{\hat{p}_y}{m\omega}\right)$$

και θα δουλέψετε για κάθε ταλαντωτή ξεχωριστά. Ονομάστε τις καταστάσεις του ενός $\left|n_x\right\rangle$ και του άλλου $\left|n_y\right\rangle$. Προφανώς οι ιδιοκαταστάσεις του πλήρους συστήματος θα είναι οι $\left|n_x, n_y\right\rangle = \left|n_x\right\rangle\left|n_y\right\rangle$. Η συνολική ενέργεια που θα βρείτε είναι

$$E_{n_x n_y} = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + 1\right)$$

αφού δεν υπάρχει αλληλεπίδραση.

Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή $n_x + n_y = 0$. Προφανώς η μόνη δυνατότητα πραγματοποίησης αυτού του συνδυασμού είναι η $n_x = 0,\ n_y = 0$ και έτσι υπάρχει μόνο μία βασική στάθμη : $\left|0,0\right\rangle = \left|0\right\rangle\left|0\right\rangle$.

Η επόμενη στάθμη είναι αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή $n_x + n_y = 1$ και αυτήν μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους: $n_x = 1,\ n_y = 0$ και $n_x = 0,\ n_y = 1$. Οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις είναι οι $\left|1,0\right\rangle = \left|1\right\rangle\left|0\right\rangle$ και $\left|0,1\right\rangle = \left|0\right\rangle\left|1\right\rangle$. Προσέξτε ότι μεταχειριζόμαστε τους «δύο ταλαντωτές» ως διακρίσιμους: Ο ένας «πάλλεται» στην κατεύθυνση του άξονα x και ο άλλος στη κατεύθυνση του άξονα y. Στην πραγματικότητα, βέβαια, δεν πρόκειται για δύο αλλά για έναν ταλαντωτή ο οποίος έχει τη δυνατότητα να κινείται σε δύο ανεξάρτητες κατευθύνσεις. Έτσι η πρώτη διεγερμένη στάθμη παρουσιάζει εκφυλισμό τάξης 2. Η επόμενη στάθμη παρουσιάζει τριπλό εκφυλισμό αφού: $n_x + n_y = 2 \Rightarrow \left(n_x = 1, n_y = 1\right),\ \left(n_x = 2, n_y = 0\right),\ \left(n_x = 0, n_y = 2\right)$.

Μπορείτε να βρείτε τον εκφυλισμό μιας τυχαίας κατάστασης αν δείτε ότι η εξίσωση $n_x + n_y = N$ (N : γνωστός ακέραιος) έχει $N+1$ διαφορετικούς συνδυασμούς ακεραίων ως λύσεις.

(β) Η βασική κατάστση δεν είναι εκφυλισμένη. Επομένως θα εφαρμόσετε τη θεωρία διαταραχών χωρίς πρόβλημα. Θα βρείτε

$$E_0 = E_0^{(0)} + \lambda\left\langle 0,0\right|\hat{V}\left|0,0\right\rangle + O(\lambda^2) = E_0^{(0)} + \lambda\frac{1}{2}m\omega^2\left\langle 0\right|\hat{x}\left|0\right\rangle\left\langle 0\right|\hat{y}\left|0\right\rangle + O(\lambda^2) = E_0^{(0)} + O(\lambda^2)$$

αφού η μέση απομάκρυνση κάθε «ξεχωριστού ταλαντωτή» είναι μηδέν.

Η δεύτερη στάθμη είναι διπλά εκφυλισμένη. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι να πάτε στον υπόχωρο 2 διάστασεων που φτιάχνουν οι ιδιοκαταστάσεις της 2ης στάθμης και να διαγωνοποιείσετε τη διαταραχή. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αν πρώτα αναπαραστείσετε τον τελεστή $\hat{V}$ στη βάση $\{|1,0\rangle, |0,1\rangle\}$

$$\hat{V} \doteq \begin{pmatrix} \langle 1,0|\hat{V}|1,0\rangle & \langle 1,0|\hat{V}|0,1\rangle \\ \langle 0,1|\hat{V}|1,0\rangle & \langle 0,1|\hat{V}|0,1\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται αμέσως : $E_{\pm} = \pm\dfrac{\hbar\omega}{2}$ και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα είναι τα

$$|+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right)$$

και

$$|-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - |0,1\rangle\right)$$

Αυτά τα ανύσματα πρέπει να αποτελέσουν τη βάση για τον προσδιορισμό της διόρθωσης στην ενέργεια της εκφυλισμένης στάθμης:

$$E_{1+} = E_1^{(0)} + \lambda V_{++} + O(\lambda^2) = E_1^{(0)} + \lambda\frac{\hbar\omega}{2} + O(\lambda^2) = \hbar\omega\left(2 + \frac{\lambda}{2}\right) + O(\lambda^2)$$

$$E_{1-} = E_1^{(0)} + \lambda V_{--} + O(\lambda^2) = E_1^{(0)} - \lambda\frac{\hbar\omega}{2} + O(\lambda^2) = \hbar\omega\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right) + O(\lambda^2)$$

Για τη δεύτερη διεγερμένη θα δουλέψετε με τον ίδιο τρόπο:

$$\hat{V} \doteq \begin{pmatrix} \langle 1,1|\hat{V}|1,1\rangle & \langle 1,1|\hat{V}|2,0\rangle & \langle 1,1|\hat{V}|0,2\rangle \\ \langle 2,0|\hat{V}|1,1\rangle & \langle 2,0|\hat{V}|2,0\rangle & \langle 2,0|\hat{V}|0,2\rangle \\ \langle 0,2|\hat{V}|1,1\rangle & \langle 0,2|\hat{V}|2,0\rangle & \langle 0,2|\hat{V}|0,2\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι

$$E_+ = \hbar\omega,\ E_0 = 0,\ E_- = -\hbar\omega$$

Τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα είναι τα

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|2,0\rangle + \frac{1}{2}|0,2\rangle,\ |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,0\rangle - |0,2\rangle\right) \text{ και}$$

$$|-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|2,0\rangle + \frac{1}{2}|0,2\rangle$$

Έτσι:

$$E_{2+} = E_2^{(0)} + \lambda V_{++} + O(\lambda^2) = \hbar\omega\left(3 + \lambda\right) + O(\lambda^2)$$

$$E_{20} = E_2^{(0)} + \lambda V_{00} + O(\lambda^2) = 3\hbar\omega + O(\lambda^2)$$

$$E_{2+} = E_2^{(0)} + \lambda V_{--} + O(\lambda^2) = \hbar\omega\left(3 - \lambda\right) + O(\lambda^2)$$

(γ) Για να λύσετε πλήρως το πρόβλημα γράψτε

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2+2\lambda xy\right)=\frac{1}{4}m\omega^2\left[\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2+\lambda\left(\left(x+y\right)^2-\left(x-y\right)^2\right)\right]$$

και ορίστε τις νέες μεταβλητές

$$\tilde{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+y\right) \text{ και } \tilde{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-y\right)$$

οπότε το δυναμικό σας θα γίνει

$$\frac{1}{2}m\omega^2(1+\lambda)\tilde{x}^2+\frac{1}{2}m\omega^2(1-\lambda)\tilde{y}^2$$

Αν τώρα παρατηρήσετε ότι

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

η πλήρης Hamiltonian γράφεται

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_{\tilde{x}}^2}{2m}+\frac{\hat{p}_{\tilde{y}}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_1^2\hat{\tilde{x}}^2+\frac{1}{2}m\omega_2^2\hat{\tilde{y}}^2$$

είναι, δηλαδή, η Hamiltonian δύο ανεξάρτητων ταλαντωτών με διαφορετική συχνότητα:

$$\omega_1=\omega\sqrt{1+\lambda} \text{ και } \omega_2=\omega\sqrt{1-\lambda}$$

Το υπόλοιπο της ιστορίας είναι απλό.

<u>Άσκηση 36.</u>

Η Hamiltonian ενός συστήματος είναι

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V}\doteq\begin{pmatrix}\varepsilon_0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & 0 & b\\ a & b & 0\end{pmatrix},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(α) Λύστε το πρόβλημα ακριβώς.
(β) Βρείτε τη διόρθωση δεύτερης τάξης στο ενεργειακό φάσμα.

Απ.
(α) Το πλήρες πρόβλημα έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & \lambda a \\ 0 & \varepsilon_0 & \lambda b \\ \lambda a & \lambda b & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Για να έχει λύση διάφορη του μηδενός το ομογενές σύστημα θα πρέπει

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon_0 - E & 0 & \lambda a \\ 0 & \varepsilon_0 - E & \lambda b \\ \lambda a & \lambda b & \varepsilon - E \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \left(E - E_1\right)\left(\tilde{E} - E_2\right)\left(E - E_3\right) = 0$$

όπου

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)^2 + 4\lambda^2 (a^2 + b^2)}\ ,\ E_2 = \varepsilon_0 \ \text{και}$$

$$E_3 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)^2 + 4\lambda^2 (a^2 + b^2)} \tag{2}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\varepsilon > \varepsilon_0$ και ότι

$$\lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)^2} \ll 1 \tag{3}$$

θα βρούμε

$$E_1 = \varepsilon_0 - \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} + O(\lambda^4) \quad \text{και} \ E_3 = \varepsilon + \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{\varepsilon - \varepsilon_0} + O(\lambda^4) \tag{4}$$

Έστω $|1\rangle, |2\rangle$ και $|3\rangle$ τα ιδιοανύσματα της πλήρους Hamiltonian που αντιστοιχούν στις ιδιοενέργειες (2). Για να τα βρούμε θα πάμε πίσω στο σύστημα (1):

$$\left(\varepsilon_0 - E\right) x + \lambda a z = 0,\ \left(\varepsilon_0 - E\right) y + \lambda b z = 0,\ \lambda a x + \lambda b y + \left(\varepsilon - E\right) z = 0 \tag{5}$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία για κάθε μια από τις ιδιοενέργειες και ζητώντας να ισχύει η $|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1$ θα πάρουμε:

$$|1\rangle \doteq \frac{1}{N_1} \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ E_1 - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \ \text{με} \ N_1 = \sqrt{\left(\varepsilon_0 - E_1\right)^2 + \lambda^2 \left(a^2 + b^2\right)}, \quad |2\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\left|3\right\rangle \doteq \frac{1}{N_3}\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ E_3-\varepsilon_0 \end{pmatrix} \text{ με } N_3=\sqrt{\left(\varepsilon_0-E_3\right)^2+\lambda^2\left(a^2+b^2\right)} \tag{6}$$

Στην προσέγγιση (3) βρίσκουμε:

$$\left|1\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right) \\ b\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right) \\ -\lambda\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0} \end{pmatrix}+O(\lambda^3),\ \left|3\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \lambda\frac{a}{\varepsilon-\varepsilon_0} \\ \lambda\frac{b}{\varepsilon-\varepsilon_0} \\ 1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0} \end{pmatrix}+O(\lambda^3) \tag{7}$$

Λύσαμε, επομένως, πλήρως το πρόβλημα και είδαμε πώς συμπεριφέρεται η λύση μας ο όρος $\lambda\hat{V}$ θεωρηθεί «μικρός» (με την έννοια που υποδηλώνει η σχέση (3)).
Μια παρατήρηση που θα μας χρειαστεί στη συνέχεια είναι αφορά στη συμπεριφορά των ιδιοανυσμάτων στο όριο $\lambda\to 0$:

$$\left|1\right\rangle \to \left|\tilde{1}^{(0)}\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \left|2\right\rangle \to \left|\tilde{2}^{(0)}\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix},\ \left|3\right\rangle \to \left|\tilde{3}^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(β) Όπως είναι προφανές το αδιατάρακτο σύστημα $\hat{H}_0 \doteq \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ παρουσιάζει εκφυλισμό αφού οι δύο πρώτες ιδιοκαταστάσεις του έχουν την ίδια ενέργεια. Τα ιδιονύσματα της $\hat{H}_0$ μπορούν να είναι τα $\left|1^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|2^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|3^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

αλλά επίσης και τα $\left|\tilde{1}^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \nu_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\tilde{2}^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\tilde{3}^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ όπου οι συντελεστές μ_1,ν_1,μ_2,ν_2 είναι τέτοιοι ώστε τα εν λόγω διανύσματα να φτιάχνουν ορθοκανονική βάση αλλά κατά τα άλλα είναι αυθαίρετοι. Όποιο σύνολο ανυσμάτων και εάν χρησιμοποιήσετε η αναπαράσταση της $\hat{H}_0$ είναι ακριβώς η ίδια.
Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία διαταραχών θα πρέπει να άρουμε την εν λόγω αυθαιρεσία. Ο συνήθης τρόπος που εφαρμόζουμε είναι να διαλέξουμε τα

ιδιοανύσματα της αδιαταρακτης Hamiltonian έτσι ώστε να είναι και ιδιοανύσματα της διαταραχής.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

και δεν μπορούμε να βρούμε με μοναδικό τρόπο τα ιδιοανύσματα της διαταραχής αφού *και* αυτά είναι εκφυλισμένα!
Μπορείτε, με πολύ απλό τρόπο, να διαπιστώσετε ότι τόσο το διάνυσμα $\left|\tilde{1}^{(0)}\right\rangle$ όσο και το $\left|\tilde{2}^{(0)}\right\rangle$ είναι ιδιοανύσματα της $\hat{V}$ με ιδιοτιμή 0.

Η θεωρητική ανάλυση μας λέει ότι θα πρέπει τώρα να διαλέξουμε τα ιδιοανύσματα $\left|\tilde{1}^{(0)}\right\rangle$, $\left|\tilde{2}^{(0)}\right\rangle$, $\left|\tilde{3}^{(0)}\right\rangle$ του αδιατάρακτου προβλήματος έτσι ώστε να είναι και ιδιοανύσματα του τελεστή:

$$\hat{\Delta} = \hat{V}\left|3^{(0)}\right\rangle\left\langle 3^{(0)}\right|\hat{V} \tag{10}$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί εύκολα στη βάση $\left|1^{(0)}\right\rangle$, $\left|2^{(0)}\right\rangle$, $\left|3^{(0)}\right\rangle$ όπου

$$\hat{\Delta} \doteq \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Ο πίνακας αυτός έχει ιδιοανύσματα τα

$$\left|\tilde{1}^{(0)}\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|\tilde{2}^{(0)}\right\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } \left|\tilde{3}^{(0)}\right\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Αυτή είναι η βάση στην οποία θα πρέπει να στηριχθεί η θεωρία διαταραχών. Είναι ακριβώς οι καταστάσεις που θα προκύψουν αν στο πλήρες πρόβλημα σβήσουμε τη διαταραχή!
Από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει την αρχική βάση μπορούμε να προχωρήσουμε χωρίς πρόβλημα : Τα βήματα της θεωρίας διαταραχών γίνονται όπως στη μη εκφυλισμένη περίπτωση. Το μόνο που χρειάζεται να βρείτε είναι η αναπαράσταση της διαταραχής στη βάση (12).
Ξεκινείστε με την παρατήρηση ότι σε μια τυχαία βάση ένας τελεστής γράφεται:

$$\hat{V}=\left(\sum_n |n\rangle\langle n|\right)\hat{V}\left(\sum_m |m\rangle\langle m|\right)=\sum_n\sum_m |n\rangle V_{nm}\langle m| \tag{13}$$

Επομένως στη βάση $|1^{(0)}\rangle,\ |2^{(0)}\rangle,\ |3^{(0)}\rangle$ έχουμε:

$$\hat{V}=a|1^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}|+b|2^{(0)}\rangle\langle 3^{(0)}|+a|3^{(0)}\rangle\langle 1^{(0)}|+b|3^{(0)}\rangle\langle 2^{(0)}| \tag{14}$$

Εύκολα τώρα βρίσκουμε:

$$\langle\tilde{1}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{1}^{(0)}\rangle=\langle\tilde{1}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{2}^{(0)}\rangle=0,\ \langle\tilde{1}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{3}^{(0)}\rangle=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\langle\tilde{2}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{1}^{(0)}\rangle=\langle\tilde{2}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{2}^{(0)}\rangle=\langle\tilde{2}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{3}^{(0)}\rangle=0$$

$$\langle\tilde{3}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{1}^{(0)}\rangle=\sqrt{a^2+b^2},\ \langle\tilde{3}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{2}^{(0)}\rangle=\langle\tilde{3}^{(0)}|\hat{V}|\tilde{3}^{(0)}\rangle=0 \tag{15}$$

Έτσι στη βάση $|\tilde{1}^{(0)}\rangle,\ |\tilde{2}^{(0)}\rangle,\ |\tilde{3}^{(0)}\rangle$ η διαταραχή αναπαρίσταται από τον πίνακα:

$$\hat{V}\doteq\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{a^2+b^2}\\ 0 & 0 & 0\\ \sqrt{a^2+b^2} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{16}$$

Εφαρμόζοντας τώρα απλώς τα αποτελέσματα της μη εκφυλισμένης θεωρίας διαταραχών θα πάρουμε:

$$E_1=\varepsilon_0-\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+O(\lambda^4)\,,\ E_2=\varepsilon_0\,,\ E_3=\varepsilon+\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}+O(\lambda^4) \tag{17}$$

$$|1\rangle\doteq\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}a\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right)\\ b\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\right)\\ -\lambda\frac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\end{pmatrix}+O(\lambda^3)\,,\ |2\rangle\doteq\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}b\\ -a\\ 0\end{pmatrix}\text{ και}$$

$$|3\rangle \doteq \begin{pmatrix} \lambda \dfrac{a}{\varepsilon-\varepsilon_0} \\ \lambda \dfrac{b}{\varepsilon-\varepsilon_0} \\ 1-\dfrac{1}{2}\lambda^2 \dfrac{a^2+b^2}{\varepsilon-\varepsilon_0} \end{pmatrix} + O(\lambda^3) \tag{18}$$

σε πλήρη συμφωνία με την ακριβή λύση.