ΤΕΙ Λάρισας, Τμήμα Ηλεκτρολογίας

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Εξέταση Περιόδου Ιουνίου 22/6/2010

Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

1. (i) Υπολογίστε την σειρά Fourier $S_f(x)$ της συναρτήσεως (18 μον.)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(η f επεκτείνεται περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$). **Υπόδειξη**: Υπολογίστε πρώτα τους συντελεστές a_0, a_1, b_1. Ίσως σας χρησιμεύσουν οι ταυτότητες $\sin x \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)$ και $\sin x \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)$.

(ii) Η σειρά Fourier της συναρτήσεως $g(x) = x^2$ στο $[-\pi, \pi]$ είναι (10 μον.)
$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$. Να βρεθεί η σειρά Fourier της $g(x)$ στο $[-2, 2]$.

2. Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace (15 μον.)

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 6, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Υπόδειξη: Βρείτε A, B, C τέτοια ώστε $\frac{6}{s(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-3}$.

3. Να βρεθεί ο μετ/μός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων (30 μον.)

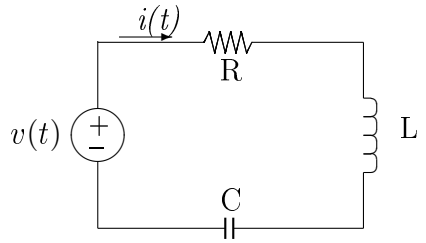
$$(i) \quad f(t) = 2t\cos(2t) \qquad (ii) \quad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 2t, & 1 \leq t < 2 \\ t+1, & 2 \leq t \end{cases}$$

4. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετ/μός Laplace των συναρτήσεων (20 μον.)

$$(i) \quad F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} \qquad (ii) \quad G(s) = e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right)$$

5. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος υποθέτουμε ότι R = 2 Ohm, L = 1 Henry και C = 1/2 Farad και $v(t) = 3$ Volt για κάθε $t > 0$. (12 μον.)

Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Kirchhoff βλέπουμε ότι η ένταση $i(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα την χρονική στιγμή t ικανοποιεί την εξίσωση



$$\frac{di}{dt} + 2i + 2\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0^-) = 3.$$

Βρείτε την ένταση $i(t)$, $t \geq 0$ επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, αν $i_L(0^-) = 1\,A$ και $v_c(0^-) = 2\,V$ (με v_c συμβολίζουμε την πτώση τάσης στα άκρα του πυκνωτή).

Δίνονται: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{e^{at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$,

$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$, $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$, $i(t) = C\,v'(t)$, $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t+c)\}$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \ \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0),$$

Καλή επιτυχία

Εξετάσεις στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Ηλεκτρολογίας, Εξέταση Περιόδου Ιανουαρίου, 26/1/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Θ_1. (i) Υπολογίστε τη σειρά Fourier $S_f(x)$ της συναρτήσεως [2]

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

(η f επεκτείνεται περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$). Που συγκλίνει η σειρά για $x \in [-\pi, \pi]$;

Λύση. Είναι

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_0^{\pi} 2\,dx\right) = \cdots = 2 - \frac{\pi}{2},$$

και για $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\text{συν}(nx)\,dx + \int_0^{\pi} 2\text{συν}(nx)\,dx\right) = \cdots = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n + 1}{n^2}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\text{ημ}(nx)\,dx + \int_0^{\pi} 2\text{ημ}(nx)\,dx\right) = \cdots = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cdot(-1)^n - 2(-1)^n + 2}{n}\right),$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\text{ημ}(nx) + b_n\text{συν}(nx)) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\text{ημ}(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\pi\cdot(-1)^n - 2(-1)^n + 2}{n\pi}\text{συν}(nx). \end{aligned}$$

(ii) Η σειρά Fourier της συναρτήσεως $g(x) = 2x$ στο $[-\pi, \pi]$ είναι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n}\cdot\text{ημ}(nx)$. Εξηγήστε γιατί στην παραπάνω σειρά εμφανίζονται μόνο [1] όροι ημιτόνων. Να βρεθεί η σειρά Fourier της $g(x)$ στο $[-5, 5]$.

Λύση. Εμφανίζονται μόνο όροι ημιτόνων διότι η $g(x)$ είναι περιττή. Είναι

$$g\left(\frac{5x}{\pi}\right) = 2\cdot\frac{5x}{\pi} = \frac{5}{\pi}\cdot 2x \sim \frac{5}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n}\cdot\text{ημ}(nx)$$

στο $[-\pi, \pi]$. Άρα,

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-20(-1)^n}{n\pi}\cdot\text{ημ}(\frac{n\pi x}{5})$$

στο $[-5, 5]$.

Θ_2. (i) Βρείτε τον αντίστροφο μετ/μό Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ της συναρτήσεως [1.5]

$$F(s) = \frac{2s^4 + 29s^2 + s - 48}{s^2 + 16}.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $2s^4 + 29s^2 + s - 48 = (2s^2 - 3)(s^2 + 16) + s$).

Λύση. Η δοθείσα σχέση μπορεί να δειχθεί με διαίρεση πολυωνύμων (κάντε το για εξάσκηση). Είναι

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{2s^4 + 29s^2 + s - 48}{s^2 + 16} &= \frac{(2s^2 - 3)(s^2 + 16) + s}{s^2 + 16} \\ &= \frac{(2s^2 - 3)(s^2 + 16)}{s^2 + 16} + \frac{s}{s^2 + 16} \\ &= 2s^2 - 3 + \frac{s}{s^2 + 16} \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}^{-1}$ και λόγω της γραμμικότητάς του παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\{s^2\} - 3\mathcal{L}^{-1}\{1\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2 + 4^2}\} \\ &= 2\delta''(t) - 3\delta(t) + \cos(4t) \end{aligned}$$

(ii) Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace: $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 2e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. [1.5]

(Υπόδειξη: Βρείτε A, B, C τέτοια ώστε $\frac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$).

Λύση. Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}$ στην παραπάνω εξίσωση και λόγω της γραμμικότητάς του παίρνουμε

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 5[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s-1}$$

όπου $Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Από τις δοθείσες αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$[s^2Y(s) - 1] - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{2}{s-1},$$

που είναι ισοδύναμη με την

$$(s^2 - 5s + 6)Y(s) = \frac{2}{s-1} + 1 = \frac{s+1}{s-1}.$$

Αφού $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$ λύνοντας ως προς $Y(s)$ παίρνουμε

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)}.$$

Ακολουθώντας την υπόδειξη, βρίσκουμε A, B, C τέτοια ώστε

$$\frac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}.$$

Είναι $A = 1$, $B = -3$ και $C = 2$, οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s-3}.$$

Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}^{-1}$ και λόγω της γραμμικότητάς του παίρνουμε

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(Y(s))\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} - 3\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} \\ &= e^{t} - 3e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

Θ_3. Να βρεθεί ο μετ/μός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

$$\text{(i)} \quad f(t) = \text{συν}(5t+1) \qquad\qquad \text{(ii)} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 2t, & 2 \le t < 3 \\ t+1, & 3 \le t < 5 \\ 0, & 5 \le t \end{cases} \qquad [1.5+1.5]$$

Λύση. (i) Είναι $f'(t) = -5\text{ημ}(5t+1)$ και $f''(t) = -25\text{συν}(5t+1) = -25f(t)$, οπότε

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -25\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - s \cdot \text{συν}(1) + 5\text{ημ}(1), \end{aligned}$$

αφού είναι $f(0) = \text{συν}(1)$ και $f'(0) = -5\text{ημ}(1)$. Συνεπώς,

$$s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - s \cdot \text{συν}(1) + 5\text{ημ}(1) = -25\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Λύνοντας ως προς $\mathcal{L}\{f(t)\}$ παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{s \cdot \text{συν}(1) - 5\text{ημ}(1)}{s^2 + 25}$$

(ii) Είναι

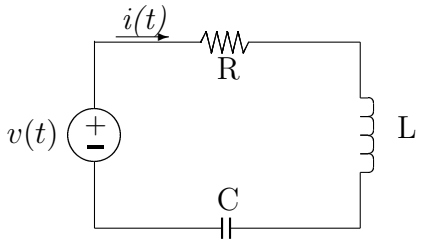
$$\begin{aligned} g(t) &= (u_2(t) - u_3(t)) \cdot 2t + (u_3(t) - u_5(t)) \cdot (t+1) \\ &= u_2(t) \cdot 2t - u_3(t) \cdot [2t - (t+1)] - u_5(t) \cdot (t+1) \\ &= u_2(t) \cdot 2t - u_3(t) \cdot (t-1) - u_5(t) \cdot (t+1) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}$ και λόγω της γραμμικότητάς του παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \mathcal{L}\{u_2(t) \cdot 2t\} - \mathcal{L}\{u_3(t) \cdot (t-1)\} - \mathcal{L}\{u_5(t) \cdot (t+1)\} \\ &= e^{-2s}\mathcal{L}\{2t+4\} - e^{-3s}\mathcal{L}\{t+2\} - e^{-5s}\mathcal{L}\{t+6\} \\ &= e^{-2s}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}\right) - e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right) - e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{6}{s}\right) \end{aligned}$$

Θ_4. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος υποθέτουμε ότι R = 2 Ohm, L = 1 Henry και C = 1/2 Farad και $v(t) = 3$ Volt για κάθε $t > 0$. [2]

Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Kirchhoff δείξτε ότι η ένταση $i(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα την χρονική στιγμή t ικανοποιεί την εξίσωση



$$\frac{di}{dt} + 2i + 2\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0^-) = 3.$$

Βρείτε την ένταση $i(t),\ t \geq 0$ επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, αν $i_L(0^-) = 1\,A$ και $v_c(0^-) = 2\,V$ (με v_c συμβολίζουμε την πτώση τάσης στα άκρα του πυκνωτή).

Λύση. Από

$$v_R + v_L + v_C = v$$

έπεται

$$R \cdot i_R + L \cdot \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau + v_C(0^-) = v$$

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές παίρνουμε

$$\frac{di}{dt} + 2i + 2\int_0^t i(\tau)d\tau + v_c(0^-) = 3.$$

Έστω $I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ και $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$. Εφαρμόζοντας τον $\mathcal{L}$ και λόγω της γραμμικότητάς του παίρνουμε

$$R \cdot I(s) + L \cdot (sI(s) - i_L(0)) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{v_C(0)}{s} = V(s)$$

Λύνοντας ως προς $I(s)$ παίρνουμε

$$\boxed{I(s) = \frac{sV(s) - v_C(0) + L \cdot i_L(0) \cdot s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}}$$

Είναι $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} = \mathcal{L}\{3\} = \dfrac{3}{s}$, οπότε από τις δοθείσες συνθήκες έχουμε

$$I(s) = \frac{3 - 2 + 1 \cdot 1 \cdot s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2}$$

Συνεπώς,

$$i(t) = e^{-t}\text{συν}(t)$$

Εξετάσεις στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
Τμήμα Ηλεκτρολογίας, Εξέταση Περιόδου Φεβρουαρίου, 9/2/2010
Διδάσκων: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

Θ_1. Υπολογίστε τη σειρά Fourier $S_f(x)$ της συναρτήσεως [2]

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x < \pi$$

(η f επεκτείνεται περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$). Βρείτε την τιμή της σειράς (που συγκλίνει) για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και υπολογίστε το άπειρο άθροισμα

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Θ_2. Να βρεθεί ο μετ/μός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

$$\text{(i)} \quad f(t) = \eta\mu(2t+3) \qquad \text{(ii)} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ 3t, & 2 \leq t < 4 \\ 2t+1, & 4 \leq t < 6 \\ 0, & 6 \leq t \end{cases}$$ [1.5+1.5]

Θ_3. (i) Βρείτε τον αντίστροφο μετ/μό Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ της συναρτήσεως [1.5]

$$F(s) = \frac{s^4 + 6s^2 + s - 24}{s^2 + 9}.$$

<u>Υπόδειξη</u>: Δείξτε πρώτα ότι $s^4 + 6s^2 + s - 24 = (s^2 - 3)(s^2 + 9) + s + 3$.

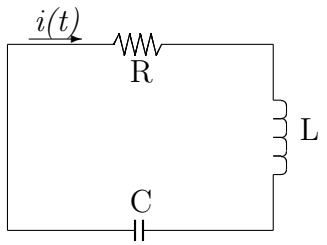
(ii) Να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace. [1.5]

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = x(t) - 2y(t)\,, & x(0) = 1 \\ y'(t) = x(t) - y(t)\,, & y(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Θ_4. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος υποθέτουμε ότι R = 6 Ohm, L = 2 Henry, και C = 1/4 Farad. [2]

Χρησιμοποιώντας τον δεύτερο νόμο του Kirchhoff δείξτε ότι η πτώση τάσης $v(t)$ στα άκρα του πυκνωτή την χρονική στιγμή t ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = 0.$$



Βρείτε την πτώση τάσης $v(t)$ στα άκρα του πυκνωτή, επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, αν $v(0) = 1$ Volt και $i(0) = 2$ Ampere (με $i(t)$ συμβολίζουμε την ένταση που διαρρέει το κύκλωμα).

<u>Δίνονται</u>: $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{e^{at}\eta\mu(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{e^{at}\sigma\upsilon\nu(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, $\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s$, $\mathcal{L}\{\delta''(t)\} = s^2$, , $i(t) = C\,v'(t)$, $\mathcal{L}\{u_c(t)f(t)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t+c)\}$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),\ \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0),$$

Καλή επιτυχία