ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΛΥΣΕΩΝ: Φ. ΚΑΛΑΦΑΤΗΣ

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΙ

→ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

→ ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ & ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 1^{o}

Δίνονται οι πίνακες:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -5 & 1 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

(i) Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν οι παρακάτω πράξεις. Στις περιπτώσεις που οι πράξεις δεν ορίζονται να αιτιολογηθεί.

A+B, A+D, B-C, AB, C^2, AC, A^2

(ii) Να δοθεί ο ανάστροφος του πίνακα E (E^T) και να γίνει έλεγχος για την ύπαρξη του αντιστρόφου του. Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

(iii) Να γίνει έλεγχος για την ύπαρξη του αντιστρόφου του C (C^{-1}). Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

Λύση:

(i) Παρακάτω δίνονται μόνο οι επιτρεπτές πράξεις:

→ $A+D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -5 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & 0+3 & 2+0\\ -2-5 & 2+1 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ -7 & 3 & 0\end{pmatrix}$

→ $AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0+2 & -1+0+8\\ -6+0-1 & 2+2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ -7 & 0\end{pmatrix}$

→ $C^2=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+7 & 21-14\\ 3-2 & 7+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 7\\ 1 & 11\end{pmatrix}$

(ii) Ο ανάστροφος ενός ν×μ πίνακα **A**=(α_{ij}) είναι ο μ×ν πίνακας που προκύπτει με την μετατροπή των γραμμών σε στήλες, **A**^{T}=(α_{ji}).

$$\rightarrow\ E^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του Ε.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας έχει αντίστροφο αφού $\det E \neq 0$.

$$\rightarrow\ E^{-1} = \frac{1}{\det E}\cdot \tilde{E}$$

$$E_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad E_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad E_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$E_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad E_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad E_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$E_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad E_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\quad E_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{\det E}\cdot \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του C.

$$\det C = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 7 = -13 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας έχει αντίστροφο αφού $\det C \neq 0$.

$$\rightarrow \; C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \tilde{C}$$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) = -2$, $C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 7 = -7$, $C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ</u>

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

<u>Θέμα 2^{ο}</u>

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y-2z&=7 \\ 2x-3y+z&=-1 \\ 3x-2y+3z&=-2 \end{aligned}$$

<u>Λύση:</u>

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$-9+2-(6-3)-2\cdot(-4+9)=-9+2-3-10=-20\neq 0$$

Δεδομένου ότι είναι $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D},\ \ y=\frac{D_y}{D},\ \ z=\frac{D_z}{D}$$

$$\rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$7\cdot(-9+2)-(-3+2)-2\cdot(2-6)=-49+1+8=-40$$

$$\rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{-40}{-20}=2$$

$$\to D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-3+2-7\cdot(6-3)-2(-4+3) = -3+2-21+2 = -20$$

$$\to y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$\to D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$6-2-(-4+3)+7\cdot(-4+9) = 6-2+1+35 = 40$$

$$\to z = \frac{D_z}{D} = \frac{40}{-20} = -2$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 3$^{\text{ο}}$

Να υπολογιστούν οι πρώτες παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x$

(ii) $g(x) = e^x \ln x$

(iii) $h(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

Λύση:

(i) Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = \left(2\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x\right)' = -2\eta\mu x - (2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x) =$$

$$-2\eta\mu x - 2x\eta\mu x - x^2\sigma\upsilon\nu x = -x^2\sigma\upsilon\nu x - 2(x+1)\eta\mu x$$

(ii) Η παράγωγος της g είναι:

$$g'(x) = \left(e^x \ln x\right)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$$

(iii) Η παράγωγος της h είναι:

$$h'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}\right)' =$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Να βρεθούν:

(i) Τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν.

(ii) Τα διαστήματα που είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής αν υπάρχουν.

Λύση:

(i) Αρχικά υπολογίζουμε την $1^{η}$ παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2\right)' = 3x^2 - 6x$$

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x		0		2	
f΄(x)	+		-		+
f(x)	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Τ.Μ. στο x_o=0 το $f(0) = 0$, Τ.Ε. στο x_o=2 το $f(2) = -4$.

(ii) Υπολογίζουμε την 2η παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f''(x)=\left(3x^2-6x\right)'=6x-6$$

Έχουμε ότι:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$$

→ Για x<1 είναι $f''(x)<0$ που σημαίνει ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$

→ Για x>1 είναι $f''(x)>0$ που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$

Σ.Κ. $(1, f(1))$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 5ο

Το κόστος σε €/km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $\mathrm{K}(x)=\frac{48}{x}+12x$, όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2. Να βρεθεί η διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος γίνεται ελάχιστο και η ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης $\mathrm{K}(x)$.

$$\mathrm{K}'(x)=\left(\frac{48}{x}+12x\right)'=-\frac{48}{x^2}+12$$

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{K}'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{48}{x^2}+12=0 \Leftrightarrow \frac{48}{x^2}=12 \Leftrightarrow 12x^2=48 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2 \rightarrow x=2 \text{ cm}$$

x		2	
K΄(x)	-	0	+
K(x)	↘		↗
		T.E.	

Η ελάχιστη τιμή του κόστους θα είναι: $\mathrm{K}(2)=\frac{48}{2}+12\cdot 2=24+24=48$ €/km.

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 1^o

Δίνονται οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν:

i) Α-3Β, ii) $2A+B^T$, iii) ΓΒ

Λύση:

i) Α-3Β=$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 12 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -5\\ -11 & -6\end{bmatrix}$

ii) $2A+B^T$=$2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 4 & 9\end{bmatrix}$

iii) ΓΒ=$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-4 & 2-3\\ -2+0 & 4+0\\ -3+4 & 6+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ -2 & 4\\ 1 & 9\end{bmatrix}$

<u>ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ</u>

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

<u>Θέμα 2ο</u>

Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

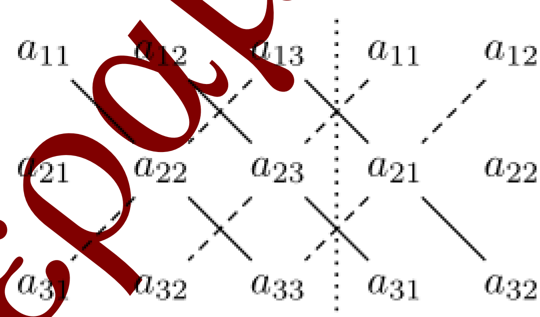
i) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα με τον κανόνα του Sarrus.

ii) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα με τον γενικό τρόπο.

iii) Είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος ή όχι και γιατί;

<u>Λύση:</u>

i) Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα Α με τον κανόνα του Sarrus



εκτελούμε υπολογισμούς όπως παρακάτω.

$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{32}\alpha_{23}\alpha_{11} - \alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}$$

Στην περίπτωσή μας και με τη βοήθεια του παραπάνω κανόνα έχουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = -1$$

ii) Με τον γενικό τρόπο υπολογισμού ορίζουσας έχουμε ότι:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

iii) Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος γιατί είναι $\det A \neq 0$.

<u>ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ</u>

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

<u>Θέμα 3ο</u>

Να λυθεί με χρήση οριζουσών το σύστημα:

$$4x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

<u>Λύση:</u>

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$

$$\rightarrow D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$\rightarrow D_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

Άρα έχουμε ότι:

$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{3}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{3}$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 4^{o}

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Λύση:

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = (1+1)(\sqrt{1+3} + 2) = 2 \cdot 4 = 8$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 5^o

Να παραγωγισθούν: i) $\eta\mu(3x)\cdot e^{2x}+4x$, ii) $\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^3}$, iii) $e^{(3x+1)}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση:

i) Έχουμε ότι:

$$\left(\eta\mu(3x)\cdot e^{2x}+4x\right)'=\left(\eta\mu(3x)\right)'e^{2x}+\eta\mu(3x)\left(e^{2x}\right)'+\left(4x\right)'=$$

$$3e^{2x}\sigma\upsilon\nu(3x)+2e^{2x}\eta\mu(3x)+4=e^{2x}(2\eta\mu(3x)+3\sigma\upsilon\nu(3x))+4$$

ii) Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x^3}\right)'=\frac{\left(\ln(x^2-1)\right)'x^3-\ln(x^2-1)\left(x^3\right)'}{x^6}=$$

$$\frac{\frac{2x}{x^2-1}x^3-3x^2\ln(x^2-1)}{x^6}=\frac{2x^4-3x^2(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^6(x^2-1)}=\frac{2x^2-3(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^4(x^2-1)}$$

iii) Έχουμε ότι:

$$\left(e^{(3x+1)}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\left(e^{(3x+1)}\right)'\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}+e^{(3x+1)}\left(\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=$$

$$3e^{(3x+1)}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}+e^{(3x+1)}\left((\sigma\upsilon\nu x)^{\frac{1}{3}}\right)'=3e^{(3x+1)}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{3}e^{(3x+1)}(\sigma\upsilon\nu x)^{-\frac{2}{3}}(-\eta\mu x)=$$

$$3e^{(3x+1)}\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{3}e^{(3x+1)}\frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\frac{9e^{(3x+1)}\sigma\upsilon\nu x-e^{(3x+1)}\eta\mu x}{3\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=\frac{e^{(3x+1)}(9\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{3\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

<u>ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ</u>

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

<u>Θέμα 6^{o}</u>

Να βρεθούν τα ακρότατα (και τι είδους) της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x$.

Για x=1.5, έχουμε ή όχι σημείο καμπής;

<u>Λύση:</u>

Αρχικά υπολογίζουμε την 1^{η} παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f^{'}(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x\right)^{'}=x^2-5x+2$$

Έχουμε ότι: $f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})$ ή $x=\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})$

x		$\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})$		$\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})$	
$f^{'}(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Υπολογίζουμε την 2^{η} παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$f^{''}(x)=\left(x^2-5x+2\right)^{'}=2x-5 \rightarrow f^{''}(x)=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=2.5 \rightarrow$ Άρα για x=1.5 δεν έχουμε σημείο καμπής αφού αυτή η τιμή δεν είναι ρίζα της $f^{''}(x)=0$.

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί τα παρακάτω όριο:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$$

Λύση:

Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$$

Παρατηρούμε ότι το 4 αποτελεί ρίζα τόσο του αριθμητή, όσο και του παρονομαστή, επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο γιατί προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Θα εργαστούμε επομένως ως εξής:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x+4}=\frac{4-1}{4+4}=\frac{3}{8}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$\begin{aligned} x+2y-z&=0 \\ 4x+y+z&=-1 \\ -3x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$1\cdot(-1-2)-2\cdot(-4+3)-1\cdot(8+3)=-3-2\cdot(-1)-11=-3+2-11=-12$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$-2\cdot(1-2)-1\cdot(-2-2)=-2\cdot(-1)-1\cdot(-4)=2+4=6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(1-2) - 1\cdot(8-3) = 1\cdot(-1) - 1\cdot 5 = -1-5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(2+2) - 2\cdot(8-3) = 1\cdot 4 - 2\cdot 5 = 4-10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2},\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει να λυθεί.

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=3 \\ 4x-3y-4z&=0 \\ 2x+6y-8z&=1 \end{aligned}$$

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$2(24+24)-3(-32+8)+4(24+6)=2\cdot 48-3\cdot(-24)+4\cdot 30=$$

$$96+72+120=288$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3(24+24)-3(0+4)+4(0+3)=3\cdot 48-12+12=144$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(0+4)-3(-32+8)+4(4-0)=2\cdot 4-3\cdot(-24)+16=8+72+16=96$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3-0)-3(4-0)+3(24+6)=-6-12+3\cdot 30=-18+90=72$$

Επομένως έχουμε:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{144}{288}=\frac{1}{2},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{96}{288}=\frac{1}{3},\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{72}{288}=\frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι α, β $\in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$, να δέχεται τοπικό ακρότατο στα σημεία x_o=1 και x_o=-2. Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left(\alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1\right)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta - 6 = 0 \\ 12\alpha - 4\beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την 2η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f''(x) = \left(3\alpha x^2 + 2\beta x - 6\right)' = 6\alpha x + 2\beta$$

$f''(1) = 9 > 0$ (Τ.Ε. στο x_o=1) και $f''(-2) = -9 < 0$ (Τ.Μ. στο x_o=-2)

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. Διατυπώστε το κριτήριο της 2ης παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της f (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).

Λύση:

1) Πρέπει να ισχύει ότι: $x > 0$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι: $x \in (0, +\infty)$

2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

→ <u>Κριτήριο 2ης Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)</u>

Ας είναι y=f(x) μία συνάρτηση ορισμένη στο [a, b], παραγωγίσιμη στο (a, b) και x_o ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν $f''(x_o)>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_o.
- ✓ αν $f''(x_o)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_o.

Επομένως έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)'=\frac{(1-2\ln x)'\,x^3-(1-2\ln x)\left(x^3\right)'}{x^6}=$$

$$\frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

$$f''(\sqrt{e})=\frac{-5+6\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^4}=\frac{-5+6\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^2}=\frac{-5+3}{e^2}=-\frac{2}{e^2}<0$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_o=\sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\frac{1}{2e}$