Ανάλυση ΙΙ
Σεπτέμβριος 2012
(Λύσεις)

Θέμα 1ο: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μερικής παραγώγου να βρείτε τις τιμές των παραγώγων $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^{1/2}, x > 0, y > 0.$$

Λύση:
Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 - \left[\frac{(\Delta x)^2}{4}\right]^{1/2}}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει
$f_y(0,0) = -1$.

Θέμα 2ο: (α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y) = (2x^2 + y^2)^{1/2}, x > 0, y > 0, \tag{1}$$

στο σημείο $P(0,1)$ κατά την κατεύθυνση της κλίσης του. (β) Να βρεθεί αν υπάρχουν κατευθύνσεις όπου η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης 1 στο σημείο $P(0,1)$ παίρνει τις τιμές 1, -1, 2.

Λύση:
Βρίσκουμε
(i)
$(\nabla f)_P = \mathbf{e}_y = \mathbf{a}_0, D_{\mathbf{a}} f = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$
(ii)
Αν θέσουμε τώρα

$\mathbf{a}_0 = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y$

Τότε

$(\nabla f)_P \cdot \mathbf{a}_0 = \sin\theta$

Και επιτρέπονται μόνο οι τιμές ± 1.

Θέμα 3ο: Να εξετασθεί η ύπαρξη ή όχι των ορίων

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^3 y}{x^6+y^2} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{xy(x-y)}{x^2+y^2}.$$

Λύση: α) Αντικαθιστώντας $y = mx^3$, βλέπουμε ότι το όριο εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου m. Συνεπώς δεν υπάρχει.

β) Έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 x}{x^2+y^2}.$$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις

$$\left|\tfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\tfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \quad \text{και} \quad \left|\tfrac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\tfrac{y^2 x}{x^2+y^2}\right| \le |x|.$$

Όμως, $\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{y\to 0} y$. Επομένως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Θέμα 4ο: Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφής $(\vec{\omega})$ ενός ιδανικού ρευστού με ταχύτητα $\vec{u}$, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}). \tag{2}$$

Έστω ότι $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ και $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$, με $u_x = u_x(x), u_y = u_y(y)$ και $\omega_z = \omega_z(z)$.

Με αυτά τα δεδομένα και γνωρίζοντας ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$, να προσδιορίσετε τη μορφή της σχέσης 2. Με βάση την τελευταία, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφής ενός διαστελλόμενου ρευστού ελαττώνεται με τον χρόνο, ενώ αυτός ενός συστελλόμενου αυξάνει.

Λύση: Από τους ορισμούς του εξωτερικού γινομένου και της στροφής προκύπτουν οι σχέσεις

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = u_y \omega_z \vec{e}_x - u_x \omega_z \vec{e}_y$$

και

$$\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) = \frac{\partial}{\partial z}(u_x \omega_z)\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial z}(u_y \omega_z)\vec{e}_y - \left[\frac{\partial}{\partial x}(u_x \omega_z) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y \omega_z)\right]\vec{e}_z,$$

αντίστοιχα. Άρα, εφόσον $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \partial \omega_z / \partial z = 0$ και $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y$, η εξίσωση 2 γράφεται

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\vec{\omega}.$$

Συνεπώς, στην περίπτωση διαστολής, δηλαδή όταν $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$, ο ρυθμός περιστροφής ελαττώνεται. Αντίθετα, η συστολή αυξάνει την περιστροφή.

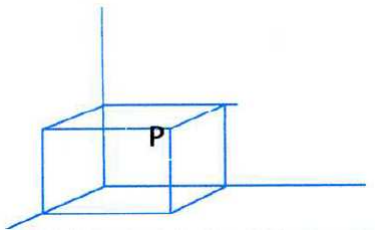
Θέμα 5ο: Αν $w = f(x, y, z)$ και τα (x, y, z) επαληθεύουν τη συνάρτηση $g(x, y, z) = 3$ και στο σημείο $P(0, 0, 0)$ έχουμε $\nabla f = (1, 2, 2)$ και $\nabla g = (2, -1, -1)$. Υπολογίστε τις τιμές των παραγώγων (α) $\partial z / \partial x$, (β) $\partial w / \partial x$, στο σημείο P.

Λύση: Από τη σχέση $g(x, y, z) = 3$ και $\nabla g = (2, -1, -1)$ έχουμε

$$g_x + g_z(\partial z / \partial x) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2,$$

όμοια βρίσκουμε ότι $(\partial w / \partial x) = 5$.

Θέμα 6ο: Να υπολογισθεί ο μέγιστος όγκος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου του σχήματος, αν το σημείο P της κορυφής που είναι διαγώνια στο σημείο (0,0,0) κινείται πάνω στην επιφάνεια $x^2 + y^2 + z = 1$.



Λύση: Ο όγκος $V = xyz = xy(1 - x^2 - y^2)$ και τα ακρότατα υπολογίζονται από τις σχέσεις $V_x = V_y = 0$. Αν υποθέσουμε ότι $x > 0,\ y > 0$, τότε $(x, y) = (1/2, 1/2)$. Υπολογίζοντας στο σημείο αυτό τις παραγώγους $V_{xx}(1/2, 1/2) = -3/2,\ V_{yy}(1/2, 1/2) = -3/2,\ V_{xy}(1/2, 1/2) = -1/2,\ V_{xy}^2 - V_{xx}V_{yy} < 0$ και καταλήγουμε ότι ο όγκος είναι μέγιστος.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούνιος 2012
ΛΥΣΕΙΣ

Ονοματεπώνυμο..... Α.Μ.....

Θέμα 1ο Προσεγγίστε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x(y-4)}{2+x+y},$$

Στην αρχή των συντεταγμένων με ένα πολυώνυμο $p(x,y)$ τρίτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές. Στη συνέχεια εξετάστε αν το $p(x,y)$ παρουσιάζει άκρες τιμές.

Λύση:

$$f(x,y) = \frac{x(y-4)}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{x+y}{2}}\right] \approx \frac{x(y-4)}{2}\left[1-\frac{x+y}{2}\right] - \frac{x}{2}(x+y)^2 = p(x,y)$$

Το πολυώνυμο $p(x,y)$ δεν παρουσιάζει άκρες τιμές.

Θέμα 2ο Φυσικό μέγεθος Q εξαρτάται από τις μεταβλητές p, s, T και δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(p,s,T) = \frac{ps - \ln(1+\cos^2 T)}{1+ps^2}$$

Ζητείται να βρεθεί η σχετική μεταβολή του φυσικού μεγέθους Q, όταν έχουμε μεταβολές $\Delta p, \Delta s$ και ΔT στις μεταβλητές p, s, T.

Λύση:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{1}{A_1}\left[A_2\left(\frac{1}{A_2} - \frac{2A_1 ps}{A_2^2}\right)\right]ds + \left[\frac{s}{A_2} - \frac{s^2 A_1}{A_2^2}\right]dp + \frac{\sin 2T dT}{A_2(1+\cos^2 T)}$$

με $A_1 = ps - \ln(1+\cos^2 T), A_2 = 1+ps^2$

Θέμα 3ο Να εξετασθεί η ύπαρξη ή όχι των ορίων

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x + y\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right].$$

Λύση: Στην πρώτη, με την αντικατάσταση $x = r\cos\vartheta$ και $y = r\sin\vartheta$, αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει όριο.

Στην δεύτερη με τον ορισμό θεωρούμε σημείο (x,y) στην περιοχή του $(0,0)$, που σημαίνει ότι $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Άρα έχουμε $|x|, |y| < \delta$, η οποία οδηγεί στα εξής

$$\left|x + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| + |y|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 2\delta.$$

Επομένως, θέτοντας $\delta = \varepsilon/2$, καταλήγουμε στην

$$\left|x + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon,$$

η οποία ισχύει για κάθε ε (οσονδήποτε μικρό). Άρα το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.

Θέμα 4ο Θεωρούμε ρευστό πυκνότητας $\rho = \rho(t, x, y, z)$ το οποίο κινείται σε βαρυτικό δυναμικό $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$. Έστω ένα τυχαίο σωματίδιο του ρευστού, με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) και ταχύτητα $\vec{u} = \vec{u}(t, x, y, z)$. Έστω επίσης ότι $H = (\nabla \cdot \vec{u})/3$ είναι η μέση απόκλιση της ταχύτητας του ρευστού. Να αποδείξετε ότι τα ολικά διαφορικά, ως προς τον χρόνο, των H και $\vec{u}$ γράφονται

$$\tfrac{dH}{dt} = \tfrac{\partial H}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H \quad \text{και} \quad \tfrac{d\vec{u}}{dt} = \tfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

αντίστοιχα (υπενθυμίζεται ότι $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = u_x \partial/\partial x + u_y \partial/\partial y + u_z \partial/\partial z$). Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2$$

και κάνοντας χρήση των εξισώσεων Euler και Poisson ,

$$\tfrac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Phi = \rho,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{1}{3}\rho.$$

Λύση: Ξεκινώντας από το ολικό διαφορικό της ταχύτητας έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}.
\end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την $H = (\nabla \cdot \vec{u})/3$ στην παραπάνω σχέση και κάνοντας χρήση της βοηθητικής ταυτότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla}[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2\right\}.
\end{aligned}$$

Με αντιμετάθεση των μερικών παραγώγων έχουμε $\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})/\partial t = \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{u}/\partial t)$, οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{3}\left\{\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2\right\} \\
&\frac{1}{3}\left[\nabla\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right) - 3H^2\right].
\end{aligned}$$

Τέλος, με τη βοήθεια των εξισώσεων Euler και Poisson , καταλήγουμε στην

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{3}\nabla^2\Phi - H^2$$
$$= -H^2 - \frac{1}{3}\rho.$$

Θέμα 5ο Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας

$$x^2 + y^2 - 3y - yz - 6z + z^2 = -5$$

που βρίσκονται πλησιέστερα και μακρύτερα από το επίπεδο Oxy.

Λύση: $f(x, y, z) = z + \lambda(x^2 + y^2 - 3y + yz - 6z + z^2 + 5)$

$$f_x = 2\lambda x = 0 \tag{1}$$

$$f_y = \lambda(2y - 3 + z) = 0 \tag{2}$$

$$f_z = 1 + \lambda(y - 6 + 2z) = 0 \tag{3}$$

$$f_\lambda = (x^2 + y^2 - 3y + yz - 6z + z^2 + 5) = 0 \tag{4}$$

Από την εξίσωση 1 έχουμε $x = 0$ ή $\lambda = 0$ και από τη 2 $\lambda = 0$ ή $z = 3 - 2y$. Για $\lambda \neq 0, x = 0, z = 3 - 2y$ αντικαθιστούμε στην 4 θα έχουμε μετά τις πράξεις $3y^2 = 4$ άρα $y = \pm 2\sqrt{3}, z = 3 \pm 4\sqrt{3}, x = 0$. Το πλησιέστερο σημείο θα είναι $N(0, 2/\sqrt{3}, 3 - 4/\sqrt{3})$ και το πιο απομακρυσμένο $F = (0, -2/\sqrt{3}, 3 + 4/\sqrt{3})$.

Θέμα 6ο Έστω οι επιφάνειες με εξισώσεις: $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ και $f_2 = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$.
α) Να υπολογισθεί η γωνία θ που σχηματίζει η τομή τους στο σημείο $P(2, -1, 2)$
β) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f_3 = x^2 + y^2$ κατά την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης C που σχηματίζει η τομή των δύο επιφανειών στο σημείο P.

Λύση:
α) Υπολογίζουμε τις κλήσεις ∇f_1 και ∇f_2 στο σημείο P και στη συνέχεια

$$\cos\vartheta = \frac{(\nabla f_1)\cdot(\nabla f_2)}{|\nabla f_1||\nabla f_2|} = \frac{8}{3\sqrt{21}} \Rightarrow \vartheta \simeq 54,4$$

β) Η εφαπτομένη στη καμπύλη C στο σημείο P θα έχει διεύθυνση

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \text{ όταν το}$$
$$\vec{n}_1 = \frac{\nabla f_1}{|\nabla f_1|} \text{ και } \vec{n}_2 = \frac{\nabla f_2}{|\nabla f_2|}$$

Άρα $D_{\vec{n}_3} f_3 = (\nabla f_3)\cdot\vec{n}_3$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
(Λύσεις)

1. Αγωνιστικό αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, όπου το διάστημα που διανύει $x = x(t)$, ορίζεται ως πλεγμένη συνάρτηση του χρόνου t, από την εξίσωση $F(x,t) = x^3 - xt^2 + x - t^3 = 0$. Ζητείται να βρεθεί η θέση, καθώς και το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t = 1$.

   Λύση: Το μέτρο της ταχύτητας $v = (dx/dt)$ και της επιτάχυνσης $\alpha = (d^2x/dt^2)$ τη χρονική στιγμή t δίνονται από τις σχέσεις

$$v = \frac{3t^2 + 2tx}{1 - t^2 + 3x^2}$$

$$\alpha = \frac{2\left[3t^3(t^2 + 10tx + 12x^2) - (3t + x)(1 + 3x^2)^2 + 2xt^2(3x^2 - 1)\right]}{(t^2 - 3x^2 - 1)^3}$$

   Για $t = 1$ προκύπτει $x = 1, v = 5/3, \alpha = -2/3$.

2. Να βρεθεί η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης $f(x,y) = \ln[1 + \sin^2(x - 2y)]$, στο σημείο $P_0(\pi/4, 0)$, κατά την κατεύθυνση της ευθείας $x - 2y = 2$ (προς τα θετικά x).

   Λύση: Υπολογίζουμε την κλίση της συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο $P(\pi/4, 0)$

$$(\nabla f)_P = \frac{2}{3}\hat{e}_x - \frac{4}{3}\hat{e}_y.$$

   Η διανυσματική μονάδα κατά την ζητούμενη κατεύθυνση της ευθείας $x - 2y = 2$ είναι

$$\hat{n}_0 = \frac{2\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{5}}.$$

   Τελικά η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)$ κατά την ζητούμενη κατεύθυνση στο σημείο P_0 είναι

$$D_{\hat{n}_0} f = (\nabla f)_{P_0} \cdot \hat{n}_0 = 0.$$

3. Σε ποιά από τα σημεία $P_1(1/2,0), P_2(b/a,1)$, έχει η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 - axy^2 + by^2 - x$, άκρα τιμή. Υπάρχουν άλλα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης και, αν υπάρχουν, πως αξιολογούνται· (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

   Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x,y)$ είναι

$$P_1\left(\frac{1}{2},0\right), P_3\left(\frac{b}{a},\frac{\sqrt{2b-a}}{a}\right), P_4\left(\frac{b}{a},\frac{-\sqrt{2b-a}}{a}\right),$$

   ενώ το $P_2\left(\frac{b}{a},1\right)$ δεν είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης. Το σημείο P_1 είναι σχετικό ελάχιστο ενώ τα σημεία P_3, P_4 είναι σαγματικά, όταν ισχύει $2b \geq a$.

4. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση της σφαίρας που είναι ομόκεντρη με την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ και εφάπτεται του επιπέδου $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

   Λύση: Η σφαίρα $x^2+y^2+z^2-4x+6y+8 = 0 \to (x-2)^2+(y+3)^2+z^2 = 5$, επομένως έχει κέντρο το σημείο $(2,-3,0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$. Η ζητούμενη σφαίρα είναι ομόκεντρη και εφάπτεται του επιπέδου $x+2y-3z-1=0$ άρα η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας

$$R = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot(-3) - 3\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

   Η εξίσωση της ζητούμενης σφαιρας είναι

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{25}{14}$$

5. Τα Ελληνικά Ταχυδρομεία για την αποστολή ενός δέματος χρεώνουν ανάλογα με το μέγεθος του κουτιού. Αν τα $x, y, z \geq 0$ είναι οι ακμές ενός κουτιού που έχει σχήμα παραλληλεπιπέδου, το κουτί δεν θα υπερχρεωθεί αν $2x + 2y + z^2 \leq 500cm$. Να βρεθεί ο μέγιστο όγκος του κουτιού για να μην υπάρξει υπερχρέωση.

   Λύση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί με πολλούς τρόπους ενας από αυτούς θα είναι να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο $V = xyz$ (με $x > 0, y > 0, z > 0$)

όταν τα οι ακμές του παραλληλεπιπέδου υπακούουν ταυτόχρονα και το δεσμό $2x + 2y + z^2 \leq 500$. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών $Lagrange$

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(2x + 2y + z^2 - 500)$$

και θα έχουμε

$$\begin{aligned} yz &= -2\lambda \\ xz &= -2\lambda \\ xy &= -2\lambda z \\ 2x + 2y + z^2 &= 500. \end{aligned}$$

από το σύστημα αυτό προκύπτει ότι $x = y$ και $z^2 = x$. Επιστρέφοντας στο δεσμό υπολογίζουμε $2x + 2x + x = 500cm$ άρα $x = y = 100cm$ και $z = 10cm$ και ο μέγιστος όγκος θα είναι $V = 10^5 cm^3$.

6. Αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{E}(x, y, z)$ επαληθεύει της εξισώσεις

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z) = \rho(x, y, z),$$

όπου η $\rho(x, y, z)$ γνωστή βαθμωτή συνάρτηση και

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z) = 0,$$

δείξτε ότι (α) $\vec{E}(x, y, z) = -\nabla\varphi$ και (β) Υπολογίστε το $\nabla^2\varphi$, όταν η $\varphi(x, y, z)$ είναι επίσης βαθμωτή συνάρτηση.

Λύση: (α) Η στροφή της σχέσης $\vec{E} = -\nabla\varphi$ μας οδηγεί στη σχέση $\nabla \times E = \nabla \times (-\nabla\varphi)$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(β)

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot (-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = \rho(x, y, z)$$

άρα η Λαπλασιανή της φ, ($\nabla^2\varphi$) είναι ίση με $-\rho(x, y, z)$.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούνιος 2009

(Λύσεις)

Ονοματεπώνυμο:	
Α.Μ:	Εξάμηνο:

Θέμα 1. Έστω ότι η πυκνότητα ενός ρευστού δίνεται από μια συνάρτηση της μορφής $\rho = \rho(x, y, z)$, όπου $\{x, y, z\}$ είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Αν ρ_0 είναι η τιμή της πυκνότητας στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ρ_1 η τιμή της στο γειτονικό σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1)$, να αποδειχθει ότι σε πρώτη (γραμμική) προσέγγιση ισχύει η σχέση

$$\rho_1 - \rho_0 = \bar{\epsilon} \cdot (\nabla\rho)_0 \ ,$$

όπου $\bar{\epsilon}$ ειναι το διάνυσμα μεταξύ των σημείων P_0 και P_1.

Λύση: Αναπτύσσοντας κατά Taylor στο σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ έχουμε

$$\rho(x, y, z) = \rho(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) \, .$$

Άρα στο σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ισχύει η

$$\rho(x_1, y_1, z_1) = \rho(x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_0 (x_1 - x_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_0 (y_1 - y_0) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_0 (z_1 - z_0) \, .$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην

$$\rho_1 - \rho_0 = \bar{\epsilon} \cdot (\nabla\rho)_0 \ ,$$

όπου $\bar{\epsilon} = (x_1 - x_0)\bar{e}_1 + (y_1 - y_0)\bar{e}_2 + (z_1 - z_0)\bar{e}_3$.

Θέμα 2. Η δύναμη Lorentz ενός μαγνητικού πεδίου $\bar{B} = B_1\bar{e}_1 + B_2\bar{e}_2 + B_3\bar{e}_3$ καθορίζεται από το διάνυσμα

$$\bar{F} = \frac{1}{2}\nabla B^2 - \left(\bar{B} \cdot \nabla\right)\bar{B} \, ,$$

όπου $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$ είναι το τετράγωνο του μέτρου του πεδίου. Υποθέτωντας ότι $B_2 = 0 = B_3$ και ότι $B_1 = B_1(x_1, x_2, x_3)$, να προσδιορισθούν οι τρείς συνιστώσες του διανύσματος $\bar{F}$, ως προς την Καρτεσιανή βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, η απόκλιση και η στροφή του

Λύση: Ως προς την βάση $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, η αρχική σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} F_1\bar{e}_1 + F_2\bar{e}_2 + F_3\bar{e}_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B^2}{\partial x_1}\,\bar{e}_1 + \frac{\partial B^2}{\partial x_2}\,\bar{e}_2 + \frac{\partial B^2}{\partial x_3}\,\bar{e}_3\right) \\ &\quad - \left(B_1\frac{\partial}{x_1} + B_2\frac{\partial}{x_2} + B_3\frac{\partial}{x_3}\right)(B_1\bar{e}_1 + B_2\bar{e}_2 + B_3\bar{e}_3)\ . \end{aligned}$$

Όμως, εφ' όσον $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$, $B_2 = 0 = B_3$ και $B_1 = B_1(x_1, x_2, x_3)$, έχουμε

$$F_1\bar{e}_1 + F_2\bar{e}_2 + F_3\bar{e}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1^2}{\partial x_1}\,\bar{e}_1 + \frac{\partial B_1^2}{\partial x_2}\,\bar{e}_2 + \frac{\partial B_1^2}{\partial x_3}\,\bar{e}_3\right) - B_1\frac{\partial B_1}{x_1}\,\bar{e}_1\,.$$

Άρα, οι τρείς συνιστώσες του διανύσματος $\bar{F}$ είναι

$$F_1 = 0\,, \qquad F_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial B_1^2}{\partial x_2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad F_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial B_1^2}{\partial x_3}\,.$$

Επομένως,

$$\nabla\cdot\bar{F} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 B_1^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 B_1^2}{\partial x_3^2}\right)$$

και

$$\nabla\times\bar{F} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 B_1^2}{\partial x_1 x_2}\,\bar{e}_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 B_1^2}{\partial x_1 x_3}\,\bar{e}_3\,.$$

Θέμα 3. (α) Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις

$$u = x + y + z \;\; v = 3x + 2y + 2z, \;\; w = 3x^2 + 2xy + 2xz$$

είναι γραμμικά εξαρτημένες και, αν είναι, να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει. (β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια

$$z = x^2 - xy + 3y^2$$

στο σημείο $P(1,1,3)$.

Λύση: (α) Οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες διότι η Ιακωβιανή τους ορίζουσα είναι ίση με μηδέν. Η σχέση που τις συνδέει είναι

$$w - v^2 + 2uv = 0.$$

(β) Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου, είναι $x + 5y - z = 3$ ενώ η εξίσωση της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια, είναι $x - 1 = (1/5)(y - 1) = 3 - z$.

Θέμα 4. Επίπεδη κίνηση περιγράφεται από το δυναμικό

$$V(x,y) = \frac{y}{x+2y}. \tag{1}$$

Να βρεθεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές, που να προσεγγίζει το δυναμικό της Εξ. (1) στο σημείο $P(0,-1)$.

Λύση: Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά βρίσκουμε $\Pi(x,y) = \frac{1}{8}(x^2+4x+2xy+4)$.

Θέμα 5 Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία που καθιστούν μέγιστο το ηλεκτροστατικό δυναμικο $U(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ και βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια $x^4 + y^4 + z^4 = a^4$.

Λύση: Κάνουμε χρήση των πολλάπλασιστών *Langrnge*, άρα μελετάμε την συνάρτηση

$$F(x,y,z,\lambda) = x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x^4 + y^4 + z^4 - a^4)$$

και

$$\begin{aligned}
F_x &= 3x^2 + 4x^3\lambda = 0 \\
F_y &= 3y^2 + 4y^3\lambda = 0 \\
F_z &= 3z^2 + 4z^3\lambda = 0 \\
F_\lambda &= x^4 + y^4 + z^4 - a^4 = 0
\end{aligned}$$

Τα κρίσημα σημεία είναι $(x = y = z = 0)$ και $x = y = z = -3/(4\lambda)$, (και οι συνδυασμοί τους, π.χ $(0, -3/(4\lambda), 0)$ κλπ) αντικαθιστώντας στην εξίσωση $F_\lambda = 0$ θα έχουμε $\lambda = \pm 3\sqrt[4]{3}/(4a)$ και $x = y = z = \pm\frac{a}{\sqrt[4]{3}}$ και το μέγιστο δυναμικό $U = \sqrt[4]{3}a^3$.

Θέμα 6 Θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

(α) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής κάθετης στο σημείο $M(x_0, y_0, z_0)$ του ελλειψοειδούς. (β) Να βρεθεί η παράγωγος της f κατά τη διεύθυνση του διανύσματος αυτού στο σημείο $M(x_0, y_0, z_0)$.

Λύση: (α) Το κάθετο διάνυσμα στο ελλειψοειδές πρέπει να είναι παράλληλο με την κλίση στο σημείο $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{n} = \frac{2x}{a^2}\hat{e}_x + \frac{2y}{b^2}\hat{e}_y + \frac{2z}{c^2}\hat{e}_z$$

και το μοναδιαίο

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\mid \vec{n} \mid}$$

(β)

$$D_{\vec{n}_0} = (\nabla f) \cdot \vec{n}_0 = 2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}$$

Ανάλυση ΙΙ
Σεπτέμβριος 2009
(Λύσεις)

1. Αν $z(x,y)$ είναι γνωστή συνάρτηση και $u(x,y)=e^x \sigma\upsilon\nu y$, $\upsilon(x,y)=e^x \eta\mu y$ να υπολογισθούν τα $A=z_{xx}+z_{yy}$ και $B=(z_x)^2+(z^y)^2$ στις νέες μεταβλητές (u,v). Υπάρχουν τιμές των μεταβλητών u κα v για τις οποίες τα A και B να παραμένουν αναλλοίωτα μετά το μετασχηματισμό στις νέες μεταβλητές;

Λύση.: Θα υπολογίσω τις παραγώγους της z στις νέες μεταβλητές (u,v).

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x = z_u e^x \cos y + z_v e^x \sin y,$$
$$z_y = z_u u_y + z_v v_y = -z_u e^x \sin y + z_v e^x \cos y,$$

και

$$z_{xx} = z_{uu}\left(u_x\right)^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}\left(v_x\right)^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \Rightarrow$$
$$z_{xx} = z_{uu}\left(e^x \cos y\right)^2 + 2z_{uv}e^{2x}\cos y \sin y + z_{vv}\left(e^x \sin y\right)^2 + z_u e^x \cos y + z_v e^x \sin y,$$

Ομοια

$$z_{yy} = z_{uu}\left(e^x \sin y\right)^2 - 2z_{uv}e^{2x}\cos y \sin y + z_{vv}\left(e^x \cos y\right)^2 - z_u e^x \cos y - z_v e^x \sin y.$$

Επομένως,

$$A = z_{xx} + z_{yy} = e^{2x}\left(\sin^2 y + \cos^2 y\right)z_{uu} + e^{2x}\left(\sin^2 y + \cos^2 y\right)z_{vv}$$
$$= e^{2x}\left(z_{uu} + z_{vv}\right) = (u^2+v^2)\left(z_{uu}+z_{vv}\right).$$

$$B = \left(z_x\right)^2 + \left(z_y\right)^2 = \left(z_u e^x \cos y + z_v e^x \sin y\right)^2 + \left(-z_u e^x \sin y + z_v e^x \cos y\right)^2$$
$$= e^{2x}\left[z_u{}^2 \cos^2 y + z_v{}^2 \sin^2 y + 2z_u z_v \cos y \sin y + z_v{}^2 \cos^2 y + z_u{}^2 \cos^2 y - 2z_u z_v \cos y \sin y\right]$$
$$= e^{2x}\left[z_u{}^2\left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) + z_v{}^2\left(\sin^2 y + \cos^2 y\right)\right]$$
$$= e^{2x}\left(z_u{}^2 + z_v{}^2\right) = (u^2+v^2)\left(z_u{}^2 + z_v{}^2\right)$$

τα

$$A = (u^2+v^2)\left[z_{uu} + z_{vv}\right]$$

$$B = (u^2+v^2)\left[z^2{}_u + z^2{}_v\right]$$

παραμένουν αναλλοίωτα όταν $u^2+v^2=1$

1. Ένας δορυφόρος ακολουθεί την τροχιά $x^3+y^3-12xy=0$ και επικοινωνεί με το κέντρο ελέγχου που βρίσκεται στο σημείο Μ(1,1) μόνον όταν ο χρόνος επικοινωνίας τους γίνει ελάχιστος. Υπολογίστε το χρόνο που θα κάνει το σήμα (αν υποθέσουμε ότι ταξιδεύει με ταχύτητα v_0) για να φτάσει από το δορυφόρο στο κέντρο ελέγχου.

Λύση: α) Θα πρέπει να γίνει ελάχιστη η απόσταση $d^2=(x-1)^2+(n-1)^2$ όταν ο δορυφόρος είναι στην τροχιά $x^3+y^3-12xy=0$. Υπολογίζοντας τα ακρότατα από τη σχέση

$$F=(x-1)^2+(y-1)^2+\lambda\left[x^3+y^3-12xy\right]$$

$$F_x=2(x-1)+\lambda(3x^2-12y)=0$$
$$F_y=2(y-1)+\lambda(3y^2-12x)=0$$

$$F_\lambda=x^3+y^3-12xy=0$$

$$\frac{2(x-1)}{3x^2-12y}=\frac{2(y-1)}{3y^z-12x}$$

$(x-y)\left[-\left(x+y\right)\left(3xy+9\right)+12\right]=0$ άρα τα σημεία θα υπολογισθούν από τις σχέσεις

$$\Sigma_1\begin{cases} x-y=0 \\ x^3+y^3-12xy=0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \Sigma_2\begin{cases} (x+y)(3xy+9)-12=0 \\ x^3+y^3-12xy=0 \end{cases}$$

$\Sigma_1 \to x=y=0,\quad x=y=6$ από το Σ_2 δεν προκύπτει κανένα σημείο.
Η ελάχιστη απόσταση θα είναι $d=\sqrt{2}$ και ο χρόνος $t=\sqrt{2}/\upsilon_0$.

2. Ζητείται να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου *λ* και του ακέραιου αριθμού *m*, ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to\lambda,\,y\to 2}\frac{\left(x-\lambda\right)^m\left(y-2\right)}{x^2+y^2-2(\lambda x+2y)+4+\lambda^2}$$

(Δικαιολογείστε την απάντησή σας)

Λύση: Θέτω $x_1=x-\lambda,\ \ y_1=x-2$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x_1\to 0, y_1\to 0} \frac{x_1^m y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες προκύπτει ότι το όριο υπάρχει και είναι μηδέν $\forall\lambda$ και $m>1$.

3. α) Αν για τις συναρτήσεις $u(x,y), \upsilon(x,y)$ ισχύει $u_x = \frac{u_y \upsilon_x}{\upsilon_\gamma}$ δείξτε ότι ισχύει

$$u = \phi(x^2 + y^2).$$

β) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου *α>0,* έτσι ώστε η δεύτερη παράγωγος της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$, που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y) = x^2 + ay^2 - 1 = 0$, να έχει για $y = 1$, την τιμή -1/4.

Λύση: α) Αν θέσω $\upsilon = x^2 + y^2$, βλέπω εύκολα, ότι λόγω της δοθείσης σχέσεως, οι συναρτήσεις u, υ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Συνεπώς ισχύει $\upsilon = \varphi(x^2 + y^2)$.

Β) Αν λάβω υπ'όψιν ότι $x^2 + ay^2 = 1$ και $y'' = \frac{-1}{a^2 y^3}$, για $y = 1$, βρίσκω $a = 2 > 0$.

5. Το διάνυσμα της συνολικής επιτάχυνσης ρευστού που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε βαρυτικό πεδίο δυναμικού U είναι

$$\vec{A} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \nabla U,$$

όπου $\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{e_x} + \upsilon_y \vec{e_y} + \upsilon_z \vec{e_z}$ (με $\upsilon_i = \upsilon_i(t,x,y,z)$, $\forall\ i = x,y,y$). Αν

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t} + \frac{1}{3}\Theta\vec{\upsilon},$$

είναι η ολική παράγωγος της ταχύτητας του ρευστού και $\Theta = \nabla\cdot\vec{\upsilon}$ (με $\Theta = \Theta(t)$), να αποδειχθεί ότι

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{2}\rho + \nabla\cdot\vec{A}.$$

Σημειώνεται ότι ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, με $\rho = 2\nabla^2 U$.

Λύση: Με δεδομένο τον ορισμό της μεταφορικής παραγώγου της ταχύτητας, την σχέση $\rho = 2\nabla^2 U$ και το ότι $\nabla\Theta = \vec{0}$, η απόκλιση του διανύσματος $\vec{A}$ οδηγεί στην

$$\nabla\cdot\vec{A} = \nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}\right) + \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{1}{2}\rho, \qquad (1)$$

όπου

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t}\vec{e_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}\vec{e_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial t}\vec{e_3}\,.$$

Από το παραπάνω ανάπτυγμα προκύπτει η

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial t}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{d\Theta}{dt}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στο δεξιό μέλος της (1), καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση.

6. Να προσεγγισθεί με πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού η συνάρτηση

$$f(x,y) = \ln(1 + x - y)\,,$$

στην αρχή των αξόνων.

Λύση: Με απλή εφαρμογή του τύπου προκύπτει η προσεγγιστική σχέση

$$\ln(1 + x - y) = x - y - \frac{1}{2}(x - y)^2\,.$$

Εξετάσεις Ανάλυση ΙΙ
Ιούνιος 2008
(Λύσεις)

4/6/2008

1. Η συνάρτηση του δυναμικού U της βαρύτητας εξαρτάται μόνο από την απόσταση $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ από την αρχή των συντεταγμένων, δηλαδή $U(r)$. Μετατρέψτε την έκφραση,

$$A=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

σε παραγώγους του U ως προς *r*.

Λύση:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial r}\left(-\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial r}\left(-\frac{y^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2+\frac{\partial U}{\partial r}\left(-\frac{z^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)$$

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=U_{rr}+\frac{2}{r}U_r$$

2. Εάν $f(x,y)=x^2y+y^2z(x,y)$ και το $z(x,y)$ ορίζεται από τη σχέση $-x^2-y^2+z^3=0$, να προσεγγισθεί η $f(x,y)$ με πολυώνυμο πρώτου βαθμού στη γειτονιά του σημείου $M(2,2)$.

Λύση:

$$f(x,y)=x^2y+y^2z(x,y)$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)$$

$f_x = 2xy + y^2 z_x \qquad f_y = x^2 + 2yz + y^2 z_y$. Από τη σχέση $-x^2 - y^2 + z^3 = 0$,

υπολογίζουμε το z=2 και $z_x = \frac{2x}{3z^2} = \frac{1}{3}$, $z_y = \frac{2y}{3z^2} = \frac{1}{3}$ άρα $f_x = \frac{28}{3}$, $f_y = \frac{40}{3}$

$$f(x,y) = 16 + (x-2)\frac{28}{3} + (y-2)\frac{40}{3}.$$

3. Μια εταιρία σχεδιάζει να λανσάρει τρία νέα προϊόντα. Υποθέτοντας ότι θα κατασκευάσει x, y, z χιλιάδες από το καθένα αντίστοιχα υπολόγισε ότι τα κέρδη της θα ακολουθούν την συνάρτηση $f(x,y,z) = x - 2y^2 - z^2$. Τεχνικοί περιορισμοί επιβάλουν τα νέα προϊόντα να υπακούουν την εξίσωση $\varphi(x,y,z) = z - x + 2y = 0$. Πόσες χιλιάδες νέα προϊόντα πρέπει να κατασκευαστούν για να μεγιστοποιηθούν τα κέρδη?

Λύση:

Αντικαθιστώντας την τιμή του *z* από τον δεσμό έχουμε

$$f(x,y) = x - 2y^2 - (x-2y)^2, \quad .$$

Βρίσκουμε ένα κρίσιμο σημείο το

$$x = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{y} = \frac{1}{2}$$

και $A = -2, B = 4, \Gamma = -12$

$$\Delta = B^2 - A\Gamma = -8.$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο.

4. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y) = \ln(2 + \sin 2x) + \tan^{-1}(xy) + a^y, \quad a > 0,$$

κατά την κατεύθυνση της ευθείας 2x-y=2, προς τα αρνητικά y, στο σημείο P(0,1).

Λύση:

Η διανυσματική μονάδα κατά μήκος της ευθείας είναι

$$\vec{a} = -\frac{\vec{e}_x + 2\vec{e}_y}{\sqrt{5}}$$

Επίσης έχουμε

$$\left(\nabla f\right)_p = 2\vec{e}_x + a\ln a\vec{e}_y$$

Τελικά

$$D_a f = \vec{a} \cdot \left(\nabla f\right)_p = -\frac{2}{\sqrt{5}}[1 + a\ln a]$$

5. Δίνεται η επιφάνεια

$$f(x,y,z) = x^3y^2z - 12 = 0 .$$

Να προσδιορισθούν οι εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στο σημείο $P_0(1,-2,3)$ της παραπάνω επιφάνειας.

Λύση

Το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας είναι

$$\overrightarrow{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_3 = 3x^2y^2z\vec{e}_1 + 2x^3yz\vec{e}_2 + x^3y^2\vec{e}_3 .$$

Άρα, στο $P_0(1,-2,3)$,

$$\left(\overrightarrow{\nabla f}\right)_0 = 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 .$$

Αν $P(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου, τότε το διάνυσμα

$$\vec{v} = (x-1)\vec{e}_1 + (y+2)\vec{e}_2 + (z-3)\vec{e}_3 ,$$

ανήκει επίσης στο εφαπτόμενο επίπεδο και είναι κάθετο στο $\left(\overrightarrow{\nabla f}\right)_0$. Άρα, η

$$\vec{v}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla f}\right) = 9(x-1) - 3(y+2) + (z-3) = 0 ,$$

είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου.

Η κάθετη ευθεία στο σημείο $P_0(1,-2,3)$ της επιφάνειας είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\left(\overrightarrow{\nabla f}\right)_0$. Άρα έχει εξίσωση

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1} .$$

6. Έστω ότι $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, αντίστοιχα, ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου το οποίο `διαπερνά' ένα φορτισμένο ρευστό. Σύμφωνα με τις εξισώσεις Maxwell ισχύουν τα εξής

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} \qquad \text{και} \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 ,$$

Υποθέτουμε επίσης ότι $\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$, όπου $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού. Τότε, αν $\vec{B} = B_2\vec{e}_2$ και $\vec{v} = v_1\vec{e}_1$, με $B_2 = B_2(x,y,z)$ και $v_1 = v_1(x,y,z)$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = B_2\frac{\partial v_1}{\partial y}\vec{e}_1 - \left(B_2\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\vec{e}_2 .$$

Λύση

Έχουμε

$$\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} = -\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \end{bmatrix} = -v_1B_2\vec{e}_3 .$$

Επίσης

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & -v_1B_2\end{bmatrix}=-\left(B_2\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_1\frac{\partial B_2}{\partial y}\right)\vec{e}_1+\left(B_2\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_1\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)\vec{e}_2\,.$$

Όμως

$$\nabla\cdot\vec{B}=\frac{\partial B_2}{\partial y}=0.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην ζητούμενη έκφραση.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούλιος 2007
(Λύσεις)

1. Έστω

$$y^2 = x^2 + f(y^2 + z^2) \tag{1}$$

όπου $f(y^2+z^2)$ αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f' \neq 0$. Δείξτε ότι η Εξ. (1) ορίζει σε πλεγμένη μορφή τις συναρτήσεις $x = x(y, z)$ και $z = z(x, y)$. Βρείτε τις μερικές παραγώγους x_y και z_y των συναρτήσεων αυτών και δείξτε ότι ικανοποιούν τη σχέση

$$yz\frac{\partial z}{\partial y} - xz\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} - xy\frac{\partial x}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = y^2 - x^2 - f(y^2 + z^2) \tag{3}$$

Η Εξ. (3) ορίζει τις συναρτήσεις $z = z(x, y)$ και $x = x(y, z)$ όταν $F_x = -2x \neq 0$ και $F_z = -2zf' \neq 0$, δηλαδή όταν $x \neq 0, z \neq 0$. Οι μερικές παράγωγοι ορίζονται από τις σχέσεις

$$x_y = -F_y/F_x = y(1 - f')/x,$$

$$z_y = -F_y/F_z = y(1 - f')/(f'z).$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (2) τις παραπάνω τιμές δείχνουμε ότι την επαληθεύουν.

2. Υπολογίστε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ που είναι ορισμένη στα σημεία της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Λύση: Δημιουργούμε τη νέα συνάρτηση

$$F(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$$

Και από τις σχέσεις $F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$ βρίσκουμε ότι $x = y = z = 1/(2\lambda)$ και κάνοντας χρήση του δεσμού βρίσκουμε ότι $\lambda = \pm\sqrt{3}/(2a)$ ή $x = y = z = \pm a/\sqrt{3}$. Η μεγίστη τιμή της συνάρτησης είναι $\sqrt{3}a$ και η ελαχίστη $-\sqrt{3}a$.

3. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,1,\infty)} e^{\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x+(y-1)^2}} \left[\frac{z+\cos(x+y+z)}{z-\sin(x+y+z)}\right]. \tag{4}$$

Λύση: Κοντά στο μηδέν ισχύει $\tan x \approx \sin x \approx x$. Θέτουμε $t = y-1$ στο πρώτο όριο και το ζητούμενο όριο γράφεται .

$$\lim_{(x,t)\longrightarrow(0,0)} e^{\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x+t^2}} \lim_{(x,y,z)\to(0,1,\infty)} \left[\frac{1+\frac{\cos(x+y+z)}{z}}{1-\frac{\sin(x+y+z)}{z}}\right]. \tag{5}$$

Το πρώτο από τα παραπάνω όρια βρίσκεται εύκολα ίσο με 1, αν μετασχηματίσουμε σε πολικές συντεταγμένες . Ίσο με τη μονάδα είναι και το δεύτερο όριο. Άρα το συνολικό όριο είναι η μονάδα.

4. Τα ετήσια έσοδα μιας επιχείρησης δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(x,y) = x^a y^b, \quad a,b \neq 0 \tag{6}$$

α) Προσεγγίστε τη συνάρτηση (6) με ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές στην περιοχή του σημείου $P_0(1,1)$.

β)Αν η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης για $x = 1.1$, $y = 1.1$ αντιπροσωπεύει τα ετήσια έξοδα της επιχείρησης για το 2006, να βρεθεί αν η επιχείρηση έχει κέρδος ή ζημία για το έτος αυτό, όταν $a = 3, b = 2$. [Δίνεται $(1.1)^5 = 1.61$]

Λύση: Αναπτύσσοντας σε σειρά *Taylor* στην περιοχή του σημείου $(1,1)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 1 + a(x-1) + b(y-1) \\ &+ \frac{1}{2}\left[a(a-1)(x-1)^2 + 2ab(x-1)(y-1) + b(b-1)(y-1)^2\right] \end{aligned} \tag{7}$$

(β) Κρατώντας τους γραμμικούς όρους έχουμε

$$f(x,y) \approx 1 + a(x-1) + b(y-1) \tag{8}$$

Στο σημείο (1.1,1.1) η (8) παίρνει την τιμή 1.5 που είναι τα έξοδα της επιχείρησης για το 2006. Όμως τα έσοδα της επιχείρησης για τον ίδιο χρόνο δίνονται από την τιμή συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^a y^b. \tag{9}$$

Στο σημείο $(1.1, 1.1)$ η (9) δίνει αριθμητικό αποτέλεσμα 1.61. Η διαφορά $1.61 - 1.5 = 0.11$ είναι τα κέρδη της επιχείρησης.

5. α) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = e^y \sqrt{xy},\ x > 0,\ y > 0 \tag{10}$$

στο σημείο $P(1, 1)$ κατά την κατεύθυνση του αρνητικού άξονα Oy.

β) Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ η οποία ορίζεται από την εξίσωση

$$F(x, y) = ax - xy - y^2 = 0,\ a \neq 0. \tag{11}$$

Λύση: α) Η παράγωγος συνάρτησης κατά κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{a}$ στο σημείο $P(1, 1)$ δίνεται από τη σχέση

$$(D_a f)_P = (\nabla f)_P \cdot \vec{a} \tag{12}$$

Είναι όμως

$$(\nabla f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right] = \frac{e}{2}\vec{i} + \frac{3e}{2}\vec{j} \tag{13}$$

$\vec{a} = -\vec{j}$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην (13) βρίσκουμε

$$(D_a f) = -\frac{3e}{2}. \tag{14}$$

β)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - y}{x + 2x},\ \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(y - a)(a + x + y)}{(x + 2y)^3} \tag{15}$$

6. α) Δίνεται η επιφάνεια $x^3y^2z = 12$. Να βρεθούν το κάθετο διάνυσμα και το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $P(1, -2, 3)$.

β) Θεωρούμε ρευστό με πυκνότητα που δίνεται από $\rho(x, y, z, t)$, όπου $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ορίζουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες και t τον χρόνο. Αν η συνολική μεταβολή της πυκνότητας είναι μηδέν, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \cdot \nabla \rho \tag{16}$$

όπου $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού.

Λύση: α) Η επιφάνεια ορίζεται από την:

$$f(x, y, z) = x^3y^2z - 12 = 0\,. \tag{17}$$

Το κάθετο διάνυσμα στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{\mathbf{k}}\,. \tag{18}$$

Κατά συνέπεια, στο σημείο $P(1, -2, 3)$,

$$\vec{\nabla} f = 9\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}\,. \tag{19}$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0\,. \tag{20}$$

Άρα, στο $P(1, -2, 3)$,

$$9(x - 1) - 3(y + 2) + (z - 3) = 0 \tag{21}$$

β) Το ολικό διαφορικό της $\rho = \rho(x, y, z, t)$ είναι:

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{22}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{23}$$

και

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v \cdot \nabla \rho \,. \tag{24}$$

Εξετάσεις Ανάλυση ΙΙ
Σεπτέμβριος 2007 (2)
(Λύσεις)

2/10/2007

1. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{3x^3}{4x^2+y^2}} \left\{ \frac{\tan^{-1}\left(4x^2+y^2\right)}{\left(4x^2+y^2\right)} \right\} .$$

ΛΥΣΗ. Το πρώτο από τα παραπάνω όρια βρίσκεται εύκολα ίσο με 1, αν μετασχηματίσουμε σε πολικές συντεταγμένες . Ίσο με τη μονάδα είναι και το δεύτερο όριο. Θέτουμε $4x^2+y^2=t$. Κοντά στο μηδέν ισχύει $\tan^{-1}t=t$. Είναι λοιπόν

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1 .$$

Συνεπώς το συνολικό όριο είναι ίσο με τη μονάδα.

2. Εξετάστε αν παράσταση

$$\left[\frac{y}{\cos^2 x}+a^y\right]dx+\left[xa^y\ln a+\tan x\right]dy, \quad a>0$$

είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$. Στην περίπτωση που είναι, ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $f(x,y)$.

ΛΥΣΗ: Ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{\cos^2 x}+a^y\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[xa^y\ln a+\tan x\right].$$

Επομένως η παράσταση είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$.
Εργαζόμενοι κατά τα γνωστά βρίσκουμε

$$f(x,y)=xa^y+y\tan x+c .$$

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις

$$f_1=x+y-2z, \quad f_2=x-2y+z, \quad f_3=(2x-y-z)(y-z),$$

είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Στην περίπτωση που είναι να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει.

ΛΥΣΗ: Επειδή η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)}$$

είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν οι δοθείσες συναρτήσεις είναι συναρτησιακά εξαρτημένες. Η σχέση που τις συνδέει είναι

$$f_3 = \left(f_1^2 - f_2^2\right)/3$$

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = x\varphi(y/x) + yh(y/x)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση $x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$.

   Οι συναρτήσεις φ και h είναι δύο φορές διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους

Λύση: Η συνάρτηση z είναι ομογενής πρώτου βαθμού άρα

$$xz_x + yz_y = z$$

παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$z_x + xz_{xx} + yz_{xy} = z_x \qquad (1)$$

και στη συνέχεια ως προς y

$$xz_{xy} + z_y + yz_{yy} = z_y \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με το x και τη (2) με το y και προσθέτοντας καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση

5. Υποθέτουμε ότι ισχύει η εξίσωση $F(x^2 + y^2,\ x^2 - y^2 + z^2) = 0$, όπου $x \neq 0,\ y \neq 0$ και $z(x, y)$ είναι πλεγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z(x, y)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Λύση: Οι συναρτήσεις $f_1 = x^2 + y^2, f_2 = x^2 - y^2 + z^2$, είναι συναρτησιακά εξαρτημένες όπως φαίνεται από την εξίσωση $F(f_1, f_2) = 0$, άρα η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μηδέν,

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x + 2zz_x & -2y + 2zz_y \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{z}{y} z_y - \frac{z}{x} z_x = 2}$$

Είναι αδύνατον η συνάρτηση $z(x,y)$ να παρουσιάζει ακρότατα γιατί αν $z_x = z_y = 0$ τότε η εξίσωση $(z/y)z_y - (z/x)z_x = 2$ δεν επαληθεύεται.

6. Σώμα στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έτσι ώστε

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} \quad \text{και} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος και $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ οι διανυσματικές μονάδες σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Αν $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ είναι η ταχύτητα της κίνησης, να αποδειχθεί ότι

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v}$$

με τη χρήση της ταυτότητας

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B})$$

Λύση

Έχουμε:

$$\nabla \times \overline{v} = \nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}).$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}
\overline{\omega} = \text{constant} \quad &\Rightarrow \quad \nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega}(\nabla \cdot \overline{r}) - (\overline{\omega} \cdot \nabla)\overline{r} \\
&\Rightarrow \quad \nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) - \left(\omega_x\frac{\partial}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right) \\
&\Rightarrow \quad \nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = 3\overline{\omega} - \omega_x\frac{\partial x}{\partial x}\overline{i} + \omega_y\frac{\partial y}{\partial y}\overline{j} + \omega_z\frac{\partial z}{\partial z}\overline{k} \\
&\Rightarrow \quad \nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = 2\overline{\omega} \\
&\Rightarrow \quad \overline{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times (\overline{\omega} \times \overline{r}).
\end{aligned}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ.

Ιούνιος 2005

(Λύσεις)

1. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης

$$F(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-(x^2+y^2)\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2z^2+y^2z^2}$$

στην αρχή των αξόνων.

Λύση: Η συνάρτηση F γράφεται

$$F = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot f = f,$$

όπου

$$f = \frac{1-\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{2}}\right)^2 = 1/2.$$

Άρα το όριο της F είναι το $1/2$.

2. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ ορίζεται από την εξίσωση $F(f, x-y, z+y+x) = 0$ τότε θα επαληθεύει και την εξίσωση

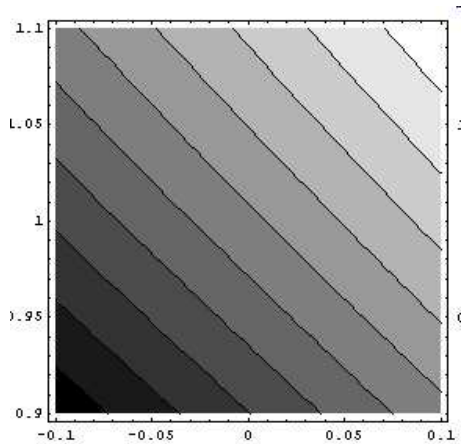
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Λύση: Οι συναρτήσεις $f, u = x-y, v = z+x+y$ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες άρα θα επαληθεύουν την Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J = \frac{D(f,u,v)}{D(x,y,z)} = 0.$$

Με αντικατάσταση και από τον υπολογισμό της ορίζουσας καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση.

3. Θεωρούμε την εξίσωση $F(x,y,z) = z^3 - xz - y = 0$. (α) Να βρεθούν τα σημεία (x,y,z) του R^3 σε περιοχές των οποίων η εξίσωση $F = 0$ ορίζει τη συνάρτηση $z = z(x,y)$. (β) Να υπολογισθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $z(x,y)$ πολύ κοντά στο σημείο $P(0,1)$.



Σχήμα 1: Οι ισοσταθμικές καμπύλες

Λύση: (α) Το θεώρημα των πλεγμένων συναρτήσεων αποκλείει τα σημεία $3z_0^2 = x_0$, γιατί στα σημεία αυτά η παράγωγος F_z είναι ίση με το μηδέν. (β) Για να βρούμε τις ισοσταθμικές καμπύλες στη περιοχή $P(0,1)$ θα πρέπει να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor στη γειτονιά του εν λόγω σημείου.

Αρκεί δηλαδή να υπολογισθούν οι παράγωγοι

$$z_x(0,1), z_y(0,1), z_{xx}(0,1), z_{xy}(0,1), z_{yy}(0,1).$$

Το ανάπτυγμα είναι

$$z(x,y) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{y-1}{3} - \frac{x(y-1)}{9} - \frac{2(y-1)^2}{9} + ...$$

και οι ισοσταθμικές καμπύλες δίνονται από τη σχέση

$$x + (y-1) - x(y-1)/3 - 2(y-1)^2/3 = k.$$

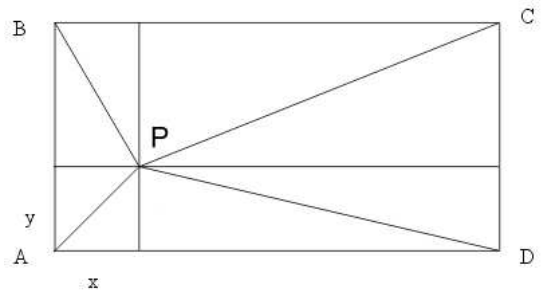
4. Εντός δοθέντος ορθογωνίου παραλληλογράμου να βρεθεί σημείο τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τις κορυφές του παραλληλογράμου να είναι ελάχιστο.

   Λύση: Το παραλληλόγραμο $ABCD$ έχει πλευρές a και b. Το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών από το σημείο P θα είναι

   $$f(x,y) = [x^2+y^2]+[(b-y)^2+x^2]+[(a-x)^2+(b-y)^2]+[y^2+(a-x)^2]$$

   ή

   $$f(x,y) = 2[x^2+y^2+(a-x)^2+(b-y)^2] = 2F(x,y)$$



   Σχήμα 2: Οι αποστάσεις είναι PA, PB, PC, PD

   λύνοντας το σύστημα $F_x = 0, F_y = 0$ βρίσκουμε το κρίσιμο σημείο $x = a/2$ και $y = b/2$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σημείο αυτό ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση f.

5. Να εξεταστεί αν η παράσταση

   $$\left[\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[2y - \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy$$

   είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$. Στην περίπτωση που είναι να βρεθεί η συνάρτηση $F(x,y)$.

   Λύση: Η ζητούμενη συνάρτηση είναι $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 + c$

6. Ένας σκιέρ κατεβαίνει ένα λόφο που η επιφάνεια του περιγράφεται από την συνάρτηση

   $$f(x,y) = 3x^2y - xy.$$

Κάποια στιγμή βρίσκεται επάνω στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = c$ στο σημείο $P(1, 2)$. Ζητείται να βρεθεί η κατεύθυνση της μεγίστης καθώς και η κατεύθυνση της μηδενικής κλίσης του λόφου την στιγμή εκείνη.

Λύση: Η κλίση του λόφου δίνεται από τη παράγωγο κατά κατεύθυνση

$$D_{\hat{n}_0} f = (\nabla f) \cdot \hat{n}_0.$$

Η μεγίστη κλίση θα είναι κατά τη κατεύθυνση του διανύσματος ∇f στο σημείο P,

$$(\nabla f)_P = 10\hat{e}_x + 2\hat{e}_y.$$

Η μηδενική κλίση θα είναι κατά τη κατεύθυνση του διανύσματος που είναι κάθετο στο ∇f. Έστω ότι το μοναδιαίο διάνυσμα που ψάχνουμε είναι το

$$\hat{n}_0 = \eta\hat{e}_x + \xi\hat{e}_y$$

τότε

$$\hat{n}_0 \cdot \hat{n}_0 = 1 = \eta^2 + \xi^2 \quad (1)$$

και

$$(\nabla f) \cdot \hat{n}_0 = 10\eta + 2\xi = 0 \quad (2).$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) βρίσκουμε $\eta = 1/\sqrt{26}, \xi = -5/\sqrt{26}$.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ[1].

Ιούνιος 2005

Ονοματεπώνυμο:	
Α.Μ:	Εξάμηνο:

1. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης
$$F(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-(x^2+y^2)\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^4+2x^2y^2+y^4+x^2z^2+y^2z^2}$$
στην αρχή των αξόνων.

2. Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ ορίζεται από την εξίσωση $F(f, x-y, y+z+x) = 0$, τότε θα επαληθεύει και την εξίσωση $f_x + f_y = 2f_z$.

3. Θεωρούμε την εξίσωση $F(x,y,z) = z^3 - xz - y = 0$. (α) Να βρεθούν τα σημεία (x,y,z) του R^3 σε περιοχές των οποίων η εξίσωση $F = 0$ ορίζει τη συνάρτηση $z = z(x,y)$. (β) Να υπολογισθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $z(x,y)$ πολύ κοντά στο σημείο $P(0,1)$.

4. Εντός δοθέντος ορθογωνίου παραλληλογράμου να βρεθεί σημείο τέτοιο ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του από τις κορυφές του παραλληλογράμου να είναι ελάχιστο.

5. Να εξεταστεί αν η παράσταση $[(1/y)\cos(x/y)]dx + [2y - (x/y^2)\cos(x/y)]dy$ είναι διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)$. Στην περίπτωση που είναι να βρεθεί η συνάρτηση $f(x,y)$.

6. Ένας σκιέρ κατεβαίνει ένα λόφο που η επιφάνεια του περιγράφεται από την συνάρτηση
$$f(x,y) = 3x^2y - xy.$$
Κάποια στιγμή βρίσκεται επάνω στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x,y) = c$ στο σημείο $P(1,2)$. Ζητείται να βρεθεί η κατεύθυνση της μέγιστης καθώς και η κατεύθυνση της μηδενικής κλίσης του λόφου την στιγμή εκείνη.

[1] Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Χρησιμοποιήστε για το κάθε θέμα διαφορετική σελίδα. Απαγορεύεται το κάπνισμα κατά τη διάρκεια των εξετάσεων

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούνιος 2004

Ονοματεπώνυμο:	
Α.Μ:	Εξάμηνο:

Θέμα 1. (α) Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της πλεγμένης συνάρτησης $y(x)$ που ορίζεται από την εξίσωση $F(x,y) = y^2 - xy - x - 1 = 0$. (β) Να βρεθούν όλα τα σημεία της επιφάνειας $z = x^3y^2$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο ($z = z_0$).

Θέμα 2. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{2x+y}{x^2+y^2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2x+y}\right)\right]^{(2x+y)}.$$

Θέμα 3. Υλικό σημείο μάζας $m = 1$ κινείται από την επίδραση του δυναμικού

$$V(x,y) = \frac{x^2+y}{1+y}.$$

Να βρεθεί πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να περιγράφει την κίνηση στη περιοχή του σημείου $P(-1,0)$. Ποιά θα είναι η μορφή της δύναμης $\vec{F} = (F_x, F_y)$ που ενεργεί στο υλικό σημείο στη γειτονιά του σημείου P, αν οι συνιστώσες της δύναμης περιγράφονται από τις σχέσεις $F_x = -V_x, F_y = -V_y$;

Θέμα 4. Αν η συνάρτηση $z = z(x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ να δειχθεί ότι δεν παρουσιάζει ακρότατο όταν $x \neq y$.

Θέμα 5. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση των σημείων της καμπύλης $x^3 + y^3 - 12xy = 0$ από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 6 Δείξτε ότι η συνάρτηση $z(x,y) = x\phi(y/x) + yh(y/x)$ επαληθεύει την διαφορική εξίσωση

$$x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} = 0.$$

Οι συναρτήσεις ϕ και h είναι δύο φορές διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.

- Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρείς ώρες.
- Χρησιμοποιήστε για το κάθε θέμα διαφορετική σελίδα.
- Απαγορεύεται το κάπνισμα την ώρα των εξετάσεων.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2004
(Λύσεις)

Θέμα 1. Τρεις φίλοι Α, Β, Γ αποφασίζουν να διοργανώσουν ένα μίνι τουρνουά σκάκι, όπου η πιθανότητα να κερδίσει, ο Α είναι $x > 0$, ο Β $y > 0$ και ο Γ $z > 0$, με $x + y + z = 1$. Αν δεχτούμε ότι η μέγιστη πιθανότητα κέρδους μπορεί να δοθεί απο τιμές των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz - xy^2$, ζητείται να βρεθεί ποιός από τους τρείς φίλους έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά.

Λύση: Αντικαθιστώντας την τιμή του z, η συνάρτηση $f(x, y, z)$ γίνεται

$$f(x, y) = xy(1 - x - y) - xy^2.$$

Λύνουμε το σύστημα $f_x = 0, f_y = 0$ και βρίσκουμε ένα σημείο με $x > 0, y > 0$ το $x = 1/3, y = 1/6$. Το σημείο αυτό θα είναι μέγιστο διότι $\Delta = -1/3 < 0$ και $A = -1/3$. Επομένως ο παίκτης Γ έχει τη μεγίστη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά διότι $z_{max} = 1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.

Θέμα 2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \ (x \neq 0, y \neq 0)$$

κατά την κατευθυνση της ευθείας $x + y = 1$ (προς τα θετικά y) στο σημείο $M(1, -1)$.

Λύση: Η ευθεία $y + x = 1$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $Q(0, 1)$ και $P(1, 0)$ αντίστοιχα. Το παράλληλο προς την ευθεία διάνυσμα με κατεύθυνση $y > 0$ είναι $\vec{PQ} = (0 - 1)\hat{e}_x + (1 - 0)\hat{e}_y = -\hat{e}_x + \hat{e}_y$ και

$$a = \frac{\vec{PQ}}{\mid \vec{PQ} \mid} = \frac{-\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{2}}.$$

Η κλίση της f είναι

$$\nabla f = -\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\hat{e}_x + \frac{2y}{x^2 + y^2}\hat{e}_y\right).$$

Η ζητούμενη παράγωγος στο σημείο $M(1, -1)$ είναι $(D_{\vec{a}}f)_M = \nabla f \cdot \vec{a} = 2/\sqrt{2}$.

Θέμα 3. Να βρεθεί η παράγωγος z_x της πλεγμένης συνάρτησης $z(x, y)$ που ορίζεται από την εξίσωση $z^2 - z - xyz + \alpha xy = 0, \ \alpha \in R$. Τι συμβαίνει όταν $a = 1$; βρείτε στην περίπτωση αυτή τη μικτή παράγωγο z_{xy}.

Λύση:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y(z-a)}{2z - xy - 1}.$$

Για $a = 1$ $z = xy$ και $z_{xy} = 1$.

Θέμα 4. Να σχεδιαστούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της

$$f(x,y) = e^{-(x^2 - ay^2)} - \cos x$$

πολύ κοντα στην περιοχή του (0,0) για διάφορες τιμές της παραμέτρου a και των τιμών της συνάρτησης f.

Λύση: Αναπτύσσω τη συνάρτηση f στην περιοχή του (0,0) και κρατώ όρους μέχρι δεύτερης ταξης.

$$f(x,y) = 1 - x^2 + ay^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + ay^2$$

άρα η ζητούμενη προσέγγιση είναι

$$-\frac{x^2}{2} + ay^2 = h$$

(1) αν $a > 0$ και $h > 0$ τότε είναι υπερβολές (2) αν $a > 0$ και $h < 0$ υπερβολές, (3) αν $a > 0$ και $h = 0$ οι ευθείες $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$, (4) αν $a < 0$ και $h = 0$ οι ευθείες εκφυλίζονται στο σημείο (0,0), (5) αν $a < 0$ και $h < 0 \Rightarrow$ έλλειψη, (6) αν $a < 0$ και $h > 0$ δεν υπάρχει καμπύλη. (7) αν $a = 0$ και $h < 0$ οι παράλληλες ευθείες $x = \pm\sqrt{2|h|}$ (8) αν $a = 0$ και $h = 0$ ο ψ άξονας, (9) αν $a = 0$ και $h < 0$ δεν υπάρχει καμπύλη.

Θέμα 5. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = y + ax$ και $v = y + bx$ και για κατάλληλες τιμές των σταθερών a και b, δείξτε ότι η συνάρτηση $z(x,y)$ που πληρεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\mathrm{y}}$$

μπορεί να μετασχηματιστεί στην

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^{\mathrm{u}}.$$

Λύση Χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο μετασχηματισμό παίρνουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial v} + b\frac{\partial z}{\partial v}$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

όμοια

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = a \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(a+b) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

το πρώτο μέλος της δοσμένης σχέσης γίνεται

$$(a^2 - 4a + 4) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2ab - 4(a+b) + 8] \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (b^2 - 4b + 4) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Η σχέση αυτή απλοποιείται θέτοντας $b = 2$ και $a = 0$ και η αρχική εξίσωση γίνεται

$$4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^{\mathrm{u}}.$$

Θέμα 6 Να μελετηθεί το όριο της συνάρτησης

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \left(z + x + y - \frac{\pi}{2} \right)^{\cos(z+x+y)}$$

όταν το $x \to 0$, $y \to 0$ και $z \to (\pi/2)^+$.
Λύση Χωρίζω τη συνάρτηση σε δύο μέρη

$$A = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

και

$$B = \left(z + x + y - \frac{\pi}{2} \right)^{\cos(z+x+y)}$$

Το A έχει όριο

$$A = \frac{\sqrt{(\pi/2)^2 + 4} - 2}{(\pi/2)^2}$$

Για το B θέτουμε $t = x + y + z$ και το $t \to (\pi/2)^+$ αν $x \to 0$, $y \to 0$ και $z \to (\pi/2)^+$ άρα

$$\lim_{t\to(\pi/2)^+} \ln B = \lim_{t\to(\pi/2)^+} \cos t \cdot \lim_{t\to(\pi/2)^+} \ln(t-\pi/2) = \frac{\lim \ln_{t\to(\pi/2)}(t-\pi/2)}{\lim_{t\to(\pi/2)}\left(\frac{1}{\cos t}\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

ή

$$\lim_{t\to(\pi/2)^+} \frac{1}{t-(\pi/2)} \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 1 \lim_{t\to(\pi/2)^+} \frac{\cos^2 t}{t-(\pi/2)} = -\lim \frac{2\sin t \cos t}{1} = 0 \Rightarrow \ln B = 0.$$

και το αρχικό όριο είναι ίσο με το όριο του A.

- Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρείς ώρες.
- Χρησιμοποιήστε για το κάθε θέμα διαφορετική σελίδα.
- Απαγορεύεται το κάπνισμα την ώρα των εξετάσεων.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2004

Ονοματεπώνυμο:	
Α.Μ:	Εξάμηνο:

Θέμα 1. Τρεις φίλοι Α, Β, Γ αποφασίζουν να διοργανώσουν ένα μίνι τουρνουά σκάκι, όπου η πιθανότητα να κερδίσει, ο Α είναι $x > 0$, ο Β $y > 0$ και ο Γ $z > 0$, με $x + y + z = 1$. Αν δεχτούμε ότι η μέγιστη πιθανότητα κέρδους μπορεί να δοθεί απο τιμές των μεταβλητών που αντιστοιχούν σε μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y, z) = xyz - xy^2$, ζητείται να βρεθεί ποιός από τους τρείς φίλους έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει το τουρνουά.

Θέμα 2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \ (x \neq 0, y \neq 0)$$

κατά την κατευθυνση της ευθείας $x + y = 1$ (προς τα θετικά y) στο σημείο $M(1, -1)$.

Θέμα 3. Να βρεθεί η παράγωγος z_x της πλεγμένης συνάρτησης $z(x, y)$ που ορίζεται από την εξίσωση $z^2 - z - xyz + \alpha xy = 0, \ \alpha \in R$. Τι συμβαίνει όταν $a = 1$; Βρείτε, στην περίπτωση που το $a = 1$, τη μικτή παράγωγο z_{xy}.

Θέμα 4. Να σχεδιαστούν οι ισοσταθμικές καμπύλες της

$$f(x, y) = e^{-(x^2 - ay^2)} - \cos x$$

πολύ κοντα στην περιοχή του (0,0) για διάφορες τιμές της παραμέτρου a και των τιμών της συνάρτησης f.

Θέμα 5. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = y + ax$ και $v = y + bx$ και για κατάλληλες τιμές των σταθερών a και b, δείξτε ότι η συνάρτηση $z(x, y)$ που πληρεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{\mathrm{y}}$$

μπορεί να μετασχηματιστεί στην $4(\partial^2 z/\partial u^2) = e^{\mathrm{u}}$.

Θέμα 6 Να μελετηθεί το όριο της συνάρτησης

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)\left(z + x + y - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos(z+x+y)}$$

όταν το $x \to 0$, $y \to 0$ και $z \to (\pi/2)^+$.

---

(1) Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρείς ώρες. (2) Χρησιμοποιήστε για το κάθε θέμα διαφορετική σελίδα. (3) Απαγορεύεται το κάπνισμα την ώρα των εξετάσεων.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ
Φεβρουάριος 2003

Επώνυμο	**Όνομα**	**Α. Μ.**

1. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y)=\frac{3(x+y)}{5(x+y)+2\sin(x+y)}\;\frac{x+\sin(x+y)}{x-\sin(x+y)}$$

   όταν $x\to\infty$, $y\to\infty$.

2. α) Υπολογίστε την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη $\sin(xy)=x$ στο σημείο P(1/2, π/3).

   β) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στην επιφάνεια $z=x^3y^5$ στο σημείο P(2,1,8).

3. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^3-2x+4y-16ay^2 \quad a\neq 0, \quad a\in R\,.$$

4. Θεωρούμε τις ομογενείς συναρτήσεις u(x,y) και v(x,y) βαθμού λ. Να δειχθεί ότι για την τυχαία συνάρτηση f=f(u,v) των u και v ισχύει η σχέση

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\left(u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

5. (a) Έστω $\vec{a}(x,y,z)=a_x(x,y,z)\hat{e}_x+a_y(x,y,z)\hat{e}_y+a_z(x,y,z)\hat{e}_z$ μια διανυσματική συνάρτηση και φ(x,y,z) αριθμητική συνάρτηση. Δείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{a})=(\nabla\varphi)\cdot\vec{a}+\varphi\nabla\cdot\vec{a}\,.$$

   (b)Υπολογίστε το διάνυσμα $\vec{B}=\nabla\times(\nabla\times\vec{a})$ αν $\vec{a}=(y^3+z^3)\hat{e}_x+(x^2+z^2)\hat{e}_y+xy\hat{e}_z$ και y +z=1/3.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση Z(x,y)=f(x+φ(y)), να δειχθεί ότι $Z_xZ_{xy}=Z_yZ_{xx}$.

---

1. Διάρκεια εξετάσεων 3 ώρες.
2. Κάθε θέμα σε ξεχωριστή σελίδα
3. Απαγορεύεται το κάπνισμα
4. Απαγορεύεται η χρήση βιβλίων ή σημειώσεων.

   ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ
Φεβρουάριος 2003
(Λύσεις)

1. Το όριο γράφεται

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{3}{5+\dfrac{2\sin(x+y)}{x+y}} \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1+\dfrac{\sin(x+y)}{x}}{1-\dfrac{\sin(x+y)}{x}}$$

που ισούται με 3/5 διότι $0 \le |\sin(x+y)| \le 1$

2α) Έχουμε $F(x,y) = \sin(xy) - x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\cos(xy)\cdot y - 1}{x\cdot\cos(xy)}$$

και

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_p = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3}$$

2β) Εφαρμόζοντας τη γενική θεωρία εύκολα βρίσκουμε

$$\beta 1)\ \ 12x + 40y - z - 56 = 0$$

$$\beta 2)\ \ \frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{40} = 8 - z$$

3. Λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία

$$(i)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{8\alpha}\right) \qquad (ii)\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{8\alpha}\right)$$

Είναι ακόμα

$$f_{xx} = 6x \quad , \quad f_{xy} = 0 \quad , \quad f_{yy} = -32\alpha$$

Στο (i) $\Delta = -192a\sqrt{\frac{2}{3}}$

και αν α>0 είναι Δ<0, έχουμε άκρα τιμή (A<0), που είναι μέγιστο. Όταν α<0 έχουμε σαγματικό σημείο διότι προκύπτει Δ>0.

Στο (ii)

$$\Delta = 192\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$$

αν α>0 είναι Δ>0 έχουμε σαγματικό σημείο. Όταν α<0 προκύπτει Δ<0 άκρα τιμή, ελάχιστο, διότι (A>0).

4. Οι συναρτήσεις u κα υ είναι ομογενείς

άρα

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda u \\ x\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + y\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \lambda \upsilon \end{aligned}\right\}(1)$$

Η συνάρτηση f είναι σύνθετη, επομένως έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2) με x και την (3) με y και τις προσθέτουμε

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} = \left[x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right]\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \left[x\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + y\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial \upsilon} = \lambda\left[u\frac{\partial f}{\partial u} + \upsilon\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\right]$$

5α)

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\vec{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\alpha_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\alpha_y)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\alpha_z) \\ &= \varphi\left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right] + \\ &\alpha_x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= \varphi(\nabla\cdot\vec{a}) + \vec{a}\cdot(\nabla\varphi) \end{aligned}$$

5β) Ισχύει η ταυ τότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \overline{a}) = \nabla(\nabla \cdot \overline{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

επειδή $\nabla \cdot \overline{a} = 0$

$$\nabla x(\nabla x\overline{a}) = -\nabla^2 \vec{a} = -6(z+y)\hat{e}_x - 4\hat{e}_y$$

$$\boxed{\vec{B} = -2(\hat{e}_x + 2\hat{e}_y)}$$

6. Θέτουμε $u(x,y) = x + \varphi(y)$ και $Z = f(u)$

τότε

$$Z_x = Z_u u_x \Rightarrow Z_x = Z_u$$

και

$$Z_y = Z_u u_y \Rightarrow Z_y = Z_u \varphi_y .$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$Z_{xx} = Z_{uu}$$

και

$$Z_{yx} = Z_{uu} u_y \Rightarrow Z_{uu}\varphi_y$$

άρα

$$Z_y \cdot Z_{xx} = Z_{uu} Z_y = \boxed{Z_{uu} Z_u \varphi_y}$$

$$Z_x = Z_{xy} = Z_x Z_{uu} \varphi_y = \boxed{Z_u Z_{uu} \varphi_y}$$

και καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα

$$\boxed{Z_y Z_{xx} = Z_x Z_{xy}}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2002

Ονοματεπώνυμο:	
Α.Φ.Μ	Εξάμηνο

- Υπάρχουν έξη προβλήματα σε αυτό το διαγώνισμα. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και βαθμολογούνται με άριστα το 10.
- Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρείς ώρες.
- Χρησιμοποιήστε για το κάθε Θέμα το χώρο που σας διαθέτουμε ή, αν υπαρχει ανάγκη, χρησιμοποιήστε και τη πίσω σελίδα .
- Απαγορεύεται η χρήση βιβλίων ή βοηθημάτων.
- Αν υπάρχουν ερωτήσεις υψώστε το χέρι σας και περιμένετε να έρθει κάποιος από τους διδάσκοντες. Απαγορεύονται οι μεταξύ σας συζητήσεις για οποιαδήποτε αιτία.
- Περιγράψτε αναλυτικά τα βήματα που θα ακολουθήσετε για τη λύση του προβλήματος. Υπάρχει η πιθανότητα να πάρετε κάποιες μονάδες αν είχατε τη σωστή ιδέα αλλά οι πράξεις σας είναι λάθος. Αντίθετα αν καταλήξετε σε σωστό αποτέλεσμα και δεν μπορούμε να αναγνωρίσουμε από που το βγάλατε θα μηδενιστεί το θέμα.

Παραδώσατε περισσότερες από πέντε ομάδες ασκήσεων το ακαδημαϊκό έτος 2001-2002;	
ΝΑΙ	ΟΧΙ

1	
2	
3	
4	
5	
6	
Βαθμός	/60=

Θέμα 1. (α) Για ποιά τιμή της σταθεράς $a > 0$ το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = yz(1+ax)\hat{e}_x + xz(1+ay)\hat{e}_y + xy(1+ax)\hat{e}_z$$

είναι συντηριτικό (δηλαδή αποτελεί τη κλίση μιας αριθμητικής συνάρτησης $f(x,y,z)$); Να υπολογισθεί αν υπάρχει η συνάρτηση f.

Λύση: Είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση $\nabla \times (\nabla f) = 0$ άρα

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz(1+ax) & xz(1+ay) & xy(1+az) \end{vmatrix} \\ &= ax(z-y)\hat{e}_x + ay(x-z)\hat{e}_y + az(y-x)\hat{e}_z \end{aligned}$$

η σχέση αυτή μηδενίζεται μόνο αν το $a = 0$. Αρα δεν υπάρχει τιμή του $a > 0$ για την οποία το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό.

β) Αν τα διανυσματικά πεδία $\vec{F}$ και $\vec{G}$ είναι συντηρητικά, είναι δυνατόν να ισχύει η σχέση

$$\vec{F} \times \vec{G} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z?$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση: Δείξτε πρώτα ότι ισχύει η σχέση $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

$$\begin{aligned} \nabla f \times \nabla g &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\hat{e}_x - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{e}_z \end{aligned}$$

αν πάρουμε τη κλίση θα δείξουμε ότι είναι μηδέν, άρα δεν είναι δυνατόν να ισχύει η αρχική ισότητα

$$\vec{F} \times \vec{G} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

γιατί

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = 0 \neq 3.$$

Θέμα 2. Αν υποθέσουμε οτι σε μια λίμνη το βάθος της σε μέτρα σε κάθε σημείο (x, y) της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση $f(x, y) = 400 - x^2 - 4y^2$. Αν η αρχική σου θέση το σημείο $M(10, 5)$. (α) Προς ποια διεύθυνση θα πρέπει να κολυμπήσης αν θέλεις να φτάσεις στα ρηχά το ταχύτερο δυνατόν; (β) Αν από λάθος εκτίμηση αρχίσης να κολυμπάς κατά τη διεύθυνση $-4\hat{e}_x + \hat{e}_y$, ποίος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του βάθους σε σχέση με την προηγούμενη επιλογή;

Λύση: (α) Η κλίση της συνάρτησης f είναι

$$\nabla f = -2xe_x - 8ye_y,$$

και για το σημείο M θα έχουμε $(\nabla f)_M = -20\hat{e}_x - 40\hat{e}_y$. Το ζητούμενο διάνυσμα θα πρέπει να είναι παράλληλο με το διάνυσμα ∇f, άρα

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-20\hat{e}_x - 40\hat{e}_y}{\sqrt{400 + 1600}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_x - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_y$$

και ο ταχύτερος ρυθμός μεταβολής του βάθους

$$D_{\hat{n}} f = (\nabla f) \cdot \hat{n} = \frac{100}{\sqrt{5}}.$$

(β) Ο ρυθμός μεταβολής του βάθους στη νέα διεύθυνση θα είναι

$$D_{\hat{n}_1} = (\nabla f) \cdot \hat{n}_1$$

όπου

$$n_1 = \frac{4\hat{e}_x - \hat{e}_y}{\sqrt{17}}$$

και

$$D_{n_1} = \frac{40}{\sqrt{17}} << D_{\hat{n}}$$

άρα θα φτάσετε στην ακτή πολύ αργότερα αν είχατε επιλέξει το δεύτερο δρόμο.

Θέμα 3. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση του κύκλου $x^2 + x^2 = 1$ από τη ευθεία $x + y = 4$.

Λύση: Το ζητούμενο είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$ όταν ταυτόχρονα ισχύουν οι δεσμή $g_1 = x^2 + y^2 - 1 = 0$ και $g_2 = u + v - 4 = 0$. Θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ u + v &= 4 \\ 2(x - u) &= 2\lambda_1 x \\ 2(y - v) &= 2\lambda_1 y \\ -2(x - u) &= \lambda_2 \\ -2(y - v) &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι το θα πρέπει το $\lambda_1 \neq 0$, γιατί διαφορετικά θα έχουμε $x = u, y = v$ πού είναι αδύνατον, γιατί θα η ευθεία δεν τέμνει το κύκλο. Άρα

$$x = \frac{x = u}{\lambda_1} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{y - v}{\lambda_1} = y.$$

Αντικαθιστώντας $x = y$ στις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε οτι $u = v$ και τα ακρότατα είναι τα σημεία $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Η απόσταση υπολογίζεται $d_1 = 2\sqrt{2} + 1$ και $d_2 = 2\sqrt{2} - 1$. Η ζητούμενη ελαχίστη απόσταση είναι $\boxed{d_2 = 2\sqrt{2} - 1}$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Σεπτέμβριος 2002
(Λύσεις)

Θέμα 1. (α) Να βρεθεί η παράμετρος $a > 0$ για την οποία το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = yz(1+ax)\hat{e}_x + xz(1+ay)\hat{e}_y + xy(1+ax)\hat{e}_z$$

είναι συντηρητικό (δηλαδή αποτελεί την κλίση μιας αριθμητικής συνάρτησης $f(x,y,z)$). Να υπολογισθεί, αν υπάρχει, η συνάρτηση f.

Λύση: Είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ άρα

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz(1+ax) & xz(1+ay) & xy(1+ax) \end{vmatrix} \\ &= ax(x-y)\hat{e}_x - ayx\hat{e}_y + az(y-x)\hat{e}_z \end{aligned}$$

η σχέση αυτή μηδενίζεται μόνο αν $a = 0$. Άρα δεν υπάρχει τιμή του $a > 0$ για την οποία το διανυσματικό πεδίο να είναι συντηρητικό.

β) Αν τα διανυσματικά πεδία $\vec{F}$ και $\vec{G}$ είναι συντηρητικά, είναι δυνατόν να ισχύει η σχέση

$$\vec{F} \times \vec{G} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z? \tag{1}$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση: Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει η ταυτότητα $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla f \times \nabla g &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\hat{e}_x - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{e}_y \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\hat{e}_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Η απόκλιση της Εξ. (2) είναι ίση με το μηδέν, ενώ η απόκλιση της ποσότητας $x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ ίση με τρία. Άρα δεν ισχύει η Εξ. (1).

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι το βάθος μιας λίμνης σε μέτρα, για κάθε σημείο (x, y) της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση $f(x, y) = 400 - x^2 - 4y^2$. Έστω ότι η αρχική θέση ενός κολυμβητή είναι το σημείο $M(10, 5)$. (α) Προς ποια κατεύθυνση θα πρέπει να κολυμπήσει αν θέλει να **φτάσει στην ακτή** απο το συντομότερο δρόμο; (β) Αν από λάθος εκτίμηση αρχίσει να κολυμπά κατά τη κατεύθυνση $4\hat{e}_x - \hat{e}_y$, ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής του βάθους σε σχέση με την προηγούμενη επιλογή που ήταν και η καλύτερη δυνατή;

Λύση: (α) Η κλίση της συνάρτησης f είναι

$$\nabla f = -2xe_x - 8ye_y$$

και για το σημείο M θα έχουμε $(\nabla f)_M = -20\hat{e}_x - 40\hat{e}_y$. Ο ρυθμός μεταβολής του βάθους γίνεται μέγιστος κατά τη διεύθυνση που είναι παράλληλη με το διάνυσμα ∇f, άρα

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{-20\hat{e}_x - 40\hat{e}_y}{\sqrt{400 + 1600}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_x - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_y.$$

Ο ταχύτερος ρυθμός **αύξησης** του βάθους είναι

$$D_{\hat{n}} f = (\nabla f) \cdot \hat{n} = 20\sqrt{5}.$$

Για να βγεί στην ακτή απο το συντομότερο δυνατό δρόμο θα πρέπει να κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση (**ελάττωση του βάθους**)

$$\boxed{\tfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{e}_x + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{e}_y}$$

και ο ρυθμός μεταβολής θα είναι $-20\sqrt{5} \simeq -44.7$.
(β) Ο ρυθμός μεταβολής του βάθους στη νέα διεύθυνση θα είναι

$$D_{\hat{n}_1} f = (\nabla f) \cdot \hat{n}_1$$

όπου

$$\hat{n}_1 = \frac{4\hat{e}_x - \hat{e}_y}{\sqrt{17}}$$

και

$$\boxed{D_{\hat{n}_1} f = -\tfrac{40}{\sqrt{17}} \simeq -9.7}$$

άρα θα φτάσει στην ακτή πολύ αργότερα αν επιλέξει το δεύτερο δρόμο γιατί $|D_{\hat{n}_1} f| << |D_{\hat{n}} f|$.

Θέμα 3. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση του κύκλου $x^2+y^2=1$ από την ευθεία $x+y=4$. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμά σας και γεωμετρικά.

Λύση: Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $d^2 = f(x,y,u,v) = (x-u)^2+(y-v)^2$ (το τετράγωνο της απόστασης) όταν ταυτόχρονα ισχύουν οι δεσμοί $g_1 = x^2+y^2-1=0$ και $g_2 = u+v-4=0$. Η νέα συνάρτηση είναι $F = f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$. Θα πρέπει δηλαδή να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}
g_1 &= 0\\
g_2 &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial u} &= 0\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= 0
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 1\\
u+v &= 4\\
2(x-u) &= 2\lambda_1 x\\
2(y-v) &= 2\lambda_1 y\\
-2(x-u) &= \lambda_2\\
-2(y-v) &= \lambda_2
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $\lambda_1 \neq 0$, γιατί διαφορετικά θα έχουμε $x=u, y=v$, πού είναι αδύνατον αφού η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο. Άρα

$$x = \frac{x-u}{\lambda_1} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{y-v}{\lambda_1} = y.$$

Αντικαθιστώντας $x=y$ στις δύο τελευταίες εξισώσεις βρίσκουμε ότι $u=v$ και τα ακρότατα είναι τα σημεία $x=y=\pm\sqrt{2}/2$. Η απόσταση υπολογίζεται $d_1 = 2\sqrt{2}+1$ (μεγίστη) και $d_2 = 2\sqrt{2}-1$(ελαχίστη). Η ζητούμενη απόσταση είναι το $\boxed{d_2 = 2\sqrt{2}-1}$.

Θέμα 4. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}} \left(1+\sin\left(\frac{3}{x+y}\right)\right)^{x+y}.$$

Λύση: Το ζητούμενο όριο αναλύεται σε γινόμενο δύο ορίων

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}} \left(1+\sin\left(\frac{3}{x+y}\right)\right)^{x+y} =$$

$$\left[\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}}\right] \cdot \left[\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(1+\sin\left(\frac{3}{x+y}\right)\right)^{x+y}\right]$$

Υπολογίζουμε τα όρια χωριστά.

(α) Το πρώτο όριο υπολογίζεται εύκολα αν αλλάξουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές,

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to\infty} e^{\frac{\cos\phi+\sin\phi}{r}} = e^0 = 1.$$

(β)Για το δεύτερο όριο θέτουμε $x+y=t$ και βρίσκουμε

$$\lim_{t\to\infty} \left(t+\sin\left(\frac{3}{t}\right)\right)^t = \infty^\infty$$

που είναι απροσδιόριστη μορφή. Θέτουμε

$$R(t) = \left(1+\sin\left(\frac{3}{t}\right)\right)^t$$

και

$$\ln R(t) = t\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{t}\right)\right) = \frac{\ln\left(1+\sin\left(\frac{3}{t}\right)\right)}{\frac{1}{t}} = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \ln R(t) = \frac{\lim_{t\to\infty} f_1(t)}{\lim_{t\to\infty} f_2(t)} = \frac{0}{0}.,$$

απροσδιόριστη μορφή.Εφαρμόζουμε το κανόνα *del'Hôpital* και το όριο υπολογίζεται από τη σχέση

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_1'(t)}{f_2'(t)} = 3$$

ή $\lim_{t\to\infty} \ln R(t) = 3$ και $\lim_{t\to\infty} R(t) = e^3$. Άρα το ζητούμενο όριο θα είναι $1\cdot e^3 = e^3$.

Θέμα 5. (ι) Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή της παραμέτρου $a \neq 0$ ώστε η παράσταση

$$(ax^2 + y)dx + (x + 2y)dy$$

να είναι τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x, y)$. Αν υπάρχει, ζητείται να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτή. (ιι) Να βρεθεί η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της πεπλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$, που ορίζεται από τη σχέση $F(x, y) = y^2 - y - e^x = 0$.

Λύση: (α)

$$f(x, y) = \frac{ax^3}{3} + xy + y^2, \quad \forall a \in R$$

(β)

$$y' = \frac{e^x}{2y - 1}, \quad y'' = \frac{e^x[(2y - 1)^2 - 2e^x]}{(2y - 1)^3}$$

Θέμα 6 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y}.$$

Να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς τα x, y, που να προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(x, y)$ στην περιοχή του σημείου $P(1, 1)$.

Λύση: Το ανάπτυγμα Taylor έχει τη μορφή,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + f_{yy}(1, 1)(y - 1)^2 + 2f_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1)\right] + .. \end{aligned}$$

οι επιμέρους όροι του αναπτύγματος είναι

$$f_x = \frac{2x}{1 + y}, \quad f_y = \frac{-x^2}{(1 + y)^2}, \quad f_{xx} = \frac{2}{1 + y},$$

$$f_{yy} = \frac{2x^2}{(1 + y)^3}, \quad f_{xy} = \frac{-2x}{(1 + y)^2}.$$

Το ζητούμενο πολυώνυμο

$$f(x, y) = \frac{1}{8}[4x^2 + y^2 - 4x(y - 1) - 1].$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούνιος 2002

Ονοματεπώνυμο.....ΑΕΜ.....

1. Να βρεθεί μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που να έχει λύση της την συνάρτηση $z(x,y) = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$. Οι συναρτήσεις f και g είναι τυχαίες διαφορίσιμες συναρτήσεις.

2. Η συνάρτηση $z = f(x,y)$ ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, όπου F τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι ικανοποιεί ταυτόχρονα και τη σχέση
$$(y-x) + (y-z)z_x + (z-x)z_y = 0 .$$

3. Υποθέσουμε ότι η θερμική ενέργεια (Q), η εντροπία (S), η εσωτερική ενέργεια (E) και η πίεση (P) ενός ιδανικού αερίου είναι συνεχείς συναρτήσεις του όγκου (V) και της θερμοκρασίας (T), με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση (πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα)
$$dQ = dE + PdV \qquad (1)$$
και ότι $dQ = TdS$. Να δειχθεί ότι
$$T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right).$$

4. Επενδυτής ξόδεψε ποσό k>0 ευρώ και αγόρασε 5 μετοχές προς x ευρώ τη μία,10 μετοχές προς y ευρώ τη μία και 20 μετοχές προς z ευρώ τη μία. Αν οι τιμές των μετοχών υπόκεινται στη δέσμευση
$$z - x + ax^2 + by^2 = 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$$
ακολουθούν ανοδική πορεία και ρευστοποιηθούν στη μέγιστη τιμή τους, ζητείται να βρεθεί η σχέση μεταξύ k,α,b ώστε ο επενδυτής να διπλασιάσει τα χρήματά του.

5. Ένα φυσικό φαινόμενο περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση
$$f(x,y) = \left(x^3 - y^3\right)\frac{e^x}{\sin(x-y)}.$$
Ζητείται να βρεθεί ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές που να περιγράφει προσεγγιστικά το φυσικό φαινόμενο κοντά στην αρχή των συντεταγμένων.

6. Να βρεθεί αν υπάρχει τιμή της παραμέτρου λ που να κάνει τις συναρτήσεις
$$f_1 = \frac{1}{x} + \frac{\lambda}{y} + \frac{1}{z}, \quad f_2 = xy + yz + zx, \quad f_3 = xyz, \quad x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$
συναρτησιακά εξαρτημένες. Στην περίπτωση που υπάρχει να βρεθεί η σχέση που τις συνδέει.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

- Κάθε θέμα θα γραφεί αυστηρά σε ξεχωριστή σελίδα
- Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα
- Διάρκεια εξετάσεων 3 ώρες

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Ιούνιος 2002

Λύσεις

1. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση z έχουμε

$$z_x = 2xf' + 2xg'$$
$$z_{xx} = 2f' + 4x^2 f'' + 2g' + 4x^2 g'$$
$$z_y = -f' + g'$$
$$z_{yy} = f'' + g''$$

απαλείφοντας τα f', g', f'' και g'' καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση

$$\boxed{z_{xx} - \frac{z_x}{x} = 4x^2 z_{yy}}$$

2. Θέτουμε $x + y + z = u$ και $x^2 + y^2 + z^2 = v$ άρα $F(u, v) = 0$ και έχουμε

$$F_x = 0 \Rightarrow F_u(1 + z_x) + F_v(2x + 2zz_x) = 0$$

$$F_y = 0 \Rightarrow F_u(1 + z_y) + F_v(2y + 2zz_y) = 0$$

Για να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις για τυχαία συνάρτηση F θα πρέπει το ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς F_u και F_v να έχει μηδενική λύση άρα

$$\begin{vmatrix} 1 + z_x & 2(x + zz_x) \\ 1 + z_y & 2(y + zz_y) \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(y - x) + (y - z)z_x + (z - x)z_y = 0}$$

3. Διαφορίζουμε την εσωτερική ενέργεια

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)dV$$

και από την εξίσωση (1) έχουμε

$$dS = \frac{dE}{T} + \left(\frac{P}{T}\right)dV \quad \text{ή}$$

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)dT + \frac{1}{T}\left[P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)\right]dV\,. \qquad \text{(A)}$$

Ισχύει επίσης η σχέση

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)dV \qquad \text{(B)}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (A) και (B) καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right) \text{ και } \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{1}{T}\left[P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)\right].$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει επίσης

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

όταν η συνάρτηση S και οι παράγωγοι της είναι συνεχείς άρα

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)\right]\right\}$$

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T}\right) = -\frac{1}{T^2}\left[P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)\right] + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T}\right)$$

και καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση

$$\boxed{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = P + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right).}$$

4. Η προς μελέτη συνάρτηση είναι

$$f(x, y, z) = 5x + 10y + 20z \qquad (1)$$

όπου $z = x - \alpha x^2 - by^2$. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε

$$f(x, y) = 5x + 10y + 20(x - \alpha x^2 - by^2) \qquad (\alpha > 0,\ \ b > 0)$$

(2)

Λύνοντας το σύστημα

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

βρίσκουμε

$$x = \frac{5}{8\alpha}, \quad y = \frac{1}{4b}, \quad z = \frac{15b - 4\alpha}{64\alpha b} \tag{4}$$

$$A = -40\alpha, \;\; B = 0, \;\; \Gamma = -40b, \;\; \Delta = B^2 - A\Gamma = -1600\alpha b < 0$$

A=-40 α <0. Επομένως έχουμε μέγιστο.

Για να διπλασιάσει τα χρήματά του πρέπει η μέγιστη τιμή της $f(x, y)$ να ισούται με 2k. Τελικά προκύπτει

$$k = \frac{5(4\alpha + 25b)}{32\alpha b}$$

5. Κοντά στην αρχή ισχύει $\sin(x - y) \approx x - y$ και η συνάρτηση γίνεται

$$f(x, y) \approx \frac{x^3 - y^3}{x - y} e^x = (x^2 + xy + y^2)e^x \approx$$

$$= (x^2 + xy + y^2)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right), \text{ διότι } e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

6. Για να είναι συναρτησιακά εξαρτημένες θα πρέπει

$$\frac{D(f_1, f_2 f_3)}{D(x, y, z)} = 0, \quad \text{ή}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & -\frac{\lambda}{y^2} & -\frac{1}{z^2} \\ y + z & x + z & x + y \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left[x + z + \frac{xz}{y}\right] = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Η σχέση που τις συνδέει είναι $f_2 = f_1 f_3$