Ανάλυση II

Πεδία Ορισμού

Να προσδιοριστούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\,,\\
f(x,y) &= \cos^{-1}(xy)\,,\\
f(x,y) &= \ln\left(x^2+y\right)\,,\\
f(x,y) &= \sin^{-1}x+\sqrt{xy}\,,\\
f(x,y) &= \ln\left(a-x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2-b\right)\,,
\end{aligned}$$

όπου οι a, b είναι πραγματικές σταθερές, και των

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2-z}+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\,,\\
f(x,y,z) &= \ln(xyz)\,.
\end{aligned}$$

Ανάλυση II

Όρια & Συνέχεια

1) Να προσδιοριστούν τα όρια των συναρτήσεων

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{2x^5 + 4x^2y^3 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}\,,$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\,, \qquad f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\,,$$

στο σημείο $(0,0)$.

2) Να αποδειχθεί ότι το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,,$$

με πεδίο ορισμού το $D = \{(x,y) \in R^2 :\ |y| < x^2\}$, στο σημείο $(0,0)$ είναι η μονάδα.

3) Να αποδειχθεί ότι το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\,,$$

στο (∞,∞) είναι το μηδέν.

4) Να προσδιορισθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}\,,$$

στο σημείο $(0,2)$.

5) Να προσδιορισθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x ,$$

όταν $x \to +\infty$ και $y \to k$.

6) Να προσδιορισθούν τα επαναλαμβανόμενα όρια και το όριο (αν υπάρχει) των συναρτήσεων

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2} , \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} ,$$

$$f(x,y) = \frac{\sin x + 2\sin y}{2\tan x + \tan y} , \qquad f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) ,$$

στο σημείο $(0,0)$.

7) Να προσδιοριστεί το όριο της συνάρτησης συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad y \leq 0 \quad \eta \quad y \geq x^2 , \\ 1 & \alpha\nu \quad 0 < y < x^2 . \end{cases}$$

στο σημείο $(0,0)$.

8) Να εξεταστεί η συνέχεια της συνάρτησης συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \alpha\nu \quad (x,y) \neq (0,0) , \\ 0 & \alpha\nu \quad (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

9) Να εξεταστεί η συνέχεια της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) & \alpha\nu \quad x^2 + y^2 > 0 , \\ 0 & \alpha\nu \quad x^2 + y^2 = 0 . \end{cases}$$

Ανάλυση ΙΙ

Μερικές Παράγωγοι & Ολικά Διαφορικά

1) Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων

$$f(x,y)=(1+xy)^y\,, \qquad f(x,y)=x^{x^y}\,, \qquad f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$
$$f(x,y)=\ln\left[\tan\left(\frac{x}{y}\right)\right]\,, \qquad f(x,y,z,v)=xyz+yzv+zvx+vxy\,.$$

2) Αν η ολική πυκνότητα, $\rho=\rho\,(t,x,y,z)$, ενός κινούμενου ρευστού παραμένει σταθερή, να προσδιορισθεί η μεταβολή της ως προς τον χρόνο.

3) Να προσδιορισθεί το ολικό διαφορικό 1ης τάξης της $f(x,y)=x^y$.

4) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x,y,z)=(z/x)\ln(y/z)$ και $f(x,y,z)=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$. Να αποδειχθεί ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+z\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{3}{x+y+z}\,,$$

αντίστοιχα.

5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x,y)=\sin(xy)+\cos(xy)$ και $f(x,y)=x\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x$. Να αποδειχθεί ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-(x^2+y^2)f(x,y) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f(x,y)\,,$$

αντίστοιχα.

6) Να προσδιορισθεί το ολικό διαφορικό 2ης τάξης της $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$.

7) Να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις

$$\left(x + \mathrm{e}^{x/y}\right)\mathrm{d}x + \left(1 - \frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{x/y}\mathrm{d}y$$

και

$$(3x^2 + 3y - 1)\mathrm{d}x + (z^2 + 3x)\mathrm{d}y + (2yz + 1)\mathrm{d}z\,,$$

παριστάνουν ολικά διαφορικά (1ης τάξης) συναρτήσεων. Στην συνέχεια να προσδιορισθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις.

8) Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η ποσότητα

$$\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)\,.$$

Ανάλυση ΙΙ

Σύνθετη Παραγώγιση & Αναπτύγματα Taylor

1) Έστω η συνάρτηση $f = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, με $x = u\mathrm{e}^v$, $y = u\mathrm{e}^{-v}$ και $z = u/v$. Να προσδιορισθούν οι $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$ και $\partial^2 f/\partial v^2$.

2) Έστω η συνάρτηση $f = f(u, r) = u \ln r$, με $u = x^3 - 3xy^2$ και $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Να προσδιορισθεί η (Λαπλασιανή) $\nabla^2 f = (\partial^2 f/\partial x^2) + (\partial^2 f/\partial y^2)$, ως προς τις u και r.

3) Να προσδιορισθεί το ολικό διαφορικό 2ης τάξης της σύνθετης συνάρτησης $f(u, v) = u + v$, όπου $u = x^2 - y^2$ και $v = \mathrm{e}^{xy}$.

4) Αν $f = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at)$, με $a =$ σταθερό, να αποδειχθεί ότι $\partial^2 f/\partial t^2 = a^2(\partial^2 f/\partial x^2)$.

5) Αν οι $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού m και η $f = f(u, v)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε

$$x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = m\left[u\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + v\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] .$$

.

6) Να γραφεί το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης της συνάρτησης $f(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ στο σημείο $(0, 0)$.

7) Αν $f(x, y) = x^3 + y^3$, να προσδιορισθεί η συνάρτηση $f(x+1, y+2)$ με χρήση του αναπτύγματος Taylor.

8) Να αναπτυχθεί η $f(x, y) = \sin(xy)$ κατά τις δυνάμεις των x και y.

9) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor η συνάρτηση $f(x, y, z) = -x^2 + 2xy + yz + z^2$ στο σημείο $(1, 1, 0)$.

Ανάλυση ΙΙ

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις & Ιακωβιανή Ορίζουσα

1) Να προσδιορισθεί η παράγωγος $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ όταν $y = 1 + y^x$ και $y^x = x^y$.

2) Να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις $ux + vy = 1$ και $x/u + y/v = 1$ ορίζουν τις πεπλεγμένες συναρτήσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$. Επίσης, να προσδιορισθούν οι ποσότητες $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ και $\mathrm{D}(x, y)/\mathrm{D}(u, v)$.

3) Έστω η καμπύλη $\mathcal{C}$, με παραμετρικές εξισώσεις της μορφής $x = x$, $y = y(x)$ και $z = z(x)$, η οποία ορίζεται από την τομή των επιφανειών $x + y + z = 0$ και $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Να προσδιορισθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}$ στο σημείο $P_0(a/\sqrt{2},\, 0,\, -a/\sqrt{2})$.

4) Αν $x = u^2 + 3v$, $y = 3u + v^3$ και $\ln z = u^2 + v^2$, να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$.

5) Έστω ότι η $z = z(x, y)$ ορίζεται από την σχέση $F(x - az,\, y - bz) = 0$, όπου η F είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Με την προϋπόθεση ότι $\partial F/\partial x = 0$ και $\partial F/\partial y = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1\,.$$

.

Ανάλυση ΙΙ

Διανυσματικές Συναρτήσεις

1) α) Αν $\vec{r}(t) = \cos t\vec{e}_1 + \sin t\vec{e}_2 + \kappa\vec{e}_3$, με $\kappa =$σταθερό, είναι το διάνυσμα θέσης ενός κινητού, να αποδειχθεί ότι είναι πάντοτε κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας του.

β) Να αποδειχθεί ότι η τροχιά $\vec{r}(t) = t^2\vec{e}_1 + (2/3)t^2\vec{e}_2 + (3/4)t^2\vec{e}_3$ είναι ευθεία.

2) Να υπολογισθούν η απόκλιση και η στροφή της συνάρτησης $\vec{f}(x,y,z) = xz^3\vec{e}_1 - 2x^2yz\vec{e}_2 + 2yz^4\vec{e}_3$ στο σημείο $P_0(1,-1,1)$.

3) Να προσδιορισθεί η παράγωγος της $\phi(x,y,z) = 4x^2y + y^2z$ στο σημείο $P_0(0,1,2)$ κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης $\vec{r}(t) = 3\cos t\vec{e}_1 + 3\sin t\vec{e}_2 + 4t\vec{e}_3$ στο σημείο $\vec{r}(\pi/2)$ της τελευταίας.

4) Να αποδειχθεί ότι η μέγιστη παράγωγος της $\phi = \phi(x,y,z)$ λαμβάνεται κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\nabla}\phi$ και ισούται προς $|\vec{\nabla}\phi|$.

5) Να υπολογισθεί η κλίση της απόκλισης της $\vec{f}(x,y,z) = 2\mathrm{e}^x\cos y\vec{e}_1 + \mathrm{e}^x\sin y\vec{e}_2 + \mathrm{e}^z\vec{e}_3$.

6) Να προσδιορισθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας $2xz^2 - 3xy - 4x = 4$ στο σημείο $P_0(1,-1,1)$.

7) Έστω $\mathcal{C}$ η καμπύλη που ορίζεται από την τομή των επιφανειών $x+y+z=0$ και $x^2+y^2+z^2=a^2$. Να προσδιορισθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $\mathcal{C}$ στο σημείο $P_0(a/\sqrt{2},\, 0,\, -a/\sqrt{2})$.

8) Έστω ότι τα διανύσματα $\bar{B}$ και $\bar{E}$ αντιστοιχούν στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που διαπερνά ένα φορτισμένο ρευστό. Σύμφωνα με τις εξισώσεις Maxwell, έχουμε

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\bar{\nabla} \times \bar{E} \qquad\qquad \kappa\alpha\iota \qquad\qquad \nabla \cdot \bar{B} = 0\,.$$

Στήν περίπτωση ρευστού υψηλής αγωγιμότητας το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται από τον νόμο του Ohm, $\bar{E} = -\bar{v} \times \bar{B}$, όπου $\bar{v}$ είναι η ταχύτητα του ρευστού. Τότε, αν $\bar{B} = B_2\bar{e}_2$ και $\bar{v} = v_1\bar{e}_1$, με $B_2 = B_2(x_1, x_2, x_3)$ και $v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3)$, να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = B_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\,\bar{e}_1 - \left(B_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \right) \bar{e}_2\,.$$

9) Η συμπεριφορά ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις εξισώσεις Maxwell. Σύμφωνα με τις τελευταίες, σε ένα μίγμα ηλεκτρονίων και πρωτονίων μηδενικού συνολικού φορτίου, έχουμε

$$\nabla \times \bar{B} = \bar{J} \qquad\qquad \kappa\alpha\iota \qquad\qquad \nabla \cdot \bar{E} = 0\,,$$

όπου $\bar{E}$, $\bar{B}$ είναι τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα, ενώ $\bar{J}$ είναι αυτό του ηλεκτρικού ρεύματος. Επίσης, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται μέσω του νόμου του Ohm

$$\bar{E} = -\bar{v} \times \bar{B}\,,$$

όπου $\bar{v}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του φορτισμένου ρευστού που 'φιλοξενεί' το πεδίο. Να αποδειχθεί ότι

$$\bar{\omega} \cdot \bar{B} = \bar{v} \cdot \bar{J}\,,$$

με $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{v}$ εξ ορισμού. Υπενθυμίζεται η ταυτότητα: $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$.

Ανάλυση II

Μέγιστα – Ελάχιστα

1) Να προσδιορισθούν τα ακραία σημεία της συνάρτησης $f(x,y) = 3\alpha xy - x^3 - y^3$, όπου α είναι μια μη μηδενική σταθερή ποσότητα.

2) Να προσδιορισθούν τα ακρότατα σημεία, αν υπάρχουν, της πεπλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από την σχέση $y^2 + 2yx^2 + 4x - 3 = 0$.

3) Να προσδιορισθούν τα ακραία σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\,,$$

με την προυπόθεση ότι ικανοποιούν την συνθήκη $x^{-2} + y^{-2} = \alpha^{-2}$, με $\alpha > 0$.

4) Το εμβαδόν τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R προσδιορίζεται από την σχέση $E = 2R^2 \sin A \sin B \sin \Gamma$, όπου A, B και Γ είναι οι γωνίες του τριγώνου. Από τα εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο τρίγωνα, να βρεθεί αυτό με το μεγαλύτερο εμβαδόν.