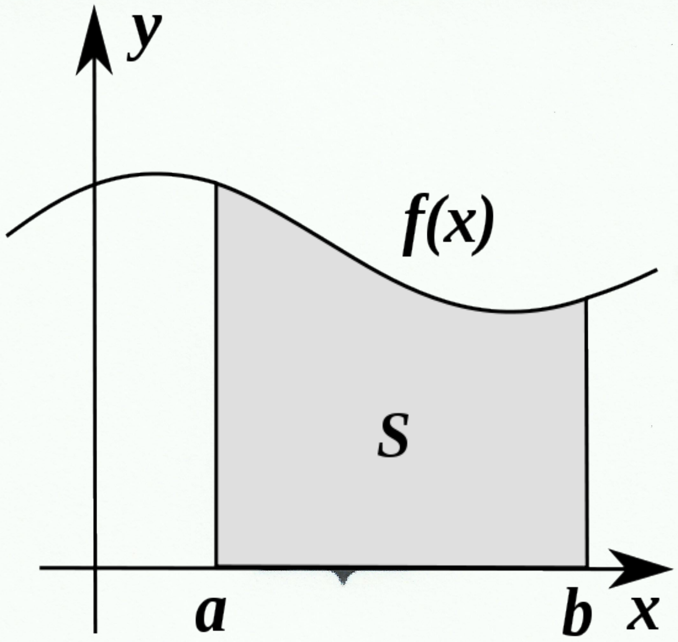


ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

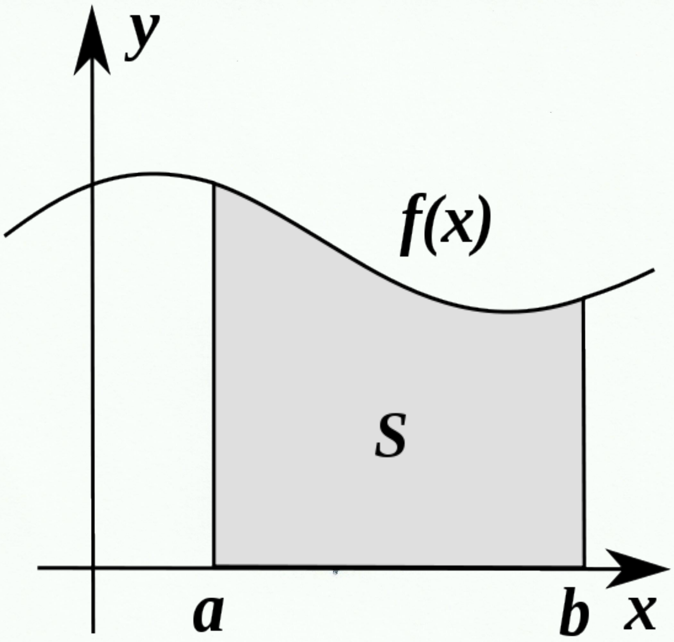
ΤΕΥΧΟΣ Β'

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

Τμήμα Πληροφορικής

ΧΕΙΡΟΓΡΑΦΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Uni Student



ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΤΕΥΧΟΣ Β'

Οι σημειώσεις αυτές περιέχουν θεωρία και λυμένες ασκήσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος ''ΑΝΑΛΥΣΗ Ι''

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Uni Student

Μονοτονία

Για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ισχύουν:

(i) $f|(\alpha,\beta)$ αύξουσα $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$

(ii) $f|(\alpha,\beta)$ φθίνουσα $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$

(iii) $f'(x)>0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

(iv) $f'(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta) \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα

Αποδείξεις σαν ασκήσεις (βλέπε σελ 264)

Δεν ισχύουν τα αντίστροφα στα (iii), (iv)

Άσκηση 23 λυμένη

Ακρότατα

Κριτήριο 1

Έστω $f|(\alpha,\beta)$ και $\xi\in(\alpha,\beta)$ με

f παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\xi)\cup(\xi,\beta)$ και συνεχής στο ξ. Τότε:

$$\text{i)}\ \left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \quad \forall x\in(\alpha,\xi) \\ \text{και} \\ f'(x)<0 \quad \forall x\in(\xi,\beta)\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ παρουσιάζει τοπ. μέγιστο στο } \xi$$

$$\text{(ii)}\ \left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \quad \forall x\in(\alpha,\xi) \\ \text{και} \\ f'(x)>0 \quad \forall x\in(\xi,\beta)\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο } \xi$$

Αποδείξεις σαν ασκήσεις (βλέπε σελ 265)

Κριτήριο 2

Έστω $f|(\alpha,\beta)$ παραγωγίσιμη και υπάρχουν $f'(\xi)=0$ και $f''(\xi)\neq 0$ όπου $\xi\in(\alpha,\beta)$ τότε

i) $f''(\xi) < 0 \Rightarrow f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ

ii) $f''(\xi) > 0 \Rightarrow f$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο ξ

Απόδειξη

(i) $f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{x - \xi}$.

Επειδή $f''(\xi) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{x-\xi} < 0$

οπότε θα υπάρχει περιοχή $\Pi(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$

με $\dfrac{f'(x)}{x-\xi} < 0 \ \forall x \in \Pi(\xi) - \{\xi\}$.

Τότε όμως ισχύει:

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi)$ και

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (\xi, \xi + \delta)$

Τότε λόγω του κριτηρίου 1 το $(\xi, f(\xi))$ θα είναι τοπικό μέγιστο

(ii) Ανάλογα

Εφαρμογές

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συναρτήσεως

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2 - x & , x > 1 \end{cases}$$

Λύση:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & , x<1 \\ -1 & , x>1 \end{cases}$$

· Έλεγχος συνέχειας.

Η f δεν παραγωγίζεται στο 1, διότι

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2.$$

και

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

Άρα $f'_-(1)\neq f'_+(1)$

Επιπλέον, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Πιθανότατα ακρότατα για $\boxed{x=0}$ ή $\boxed{x=1}$

· Από το δεύτερο κριτήριο επειδή $f'(0)=0$ και $f''(0)=2>0$

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=0$

· Από το πρώτο κριτήριο για $\xi=1$ και επειδή

$f'(x)>0 \quad , \forall\, x\in(0,1)$

$f'(x)<0 \quad , \forall\, x\in(1,2)$

Έπεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$.

SKMG

Ασκηση 34 άλυτη

Για την κατασκευή ενός κυλινδρικού τενεκεδένιου κουτιού χωρίς καπάκι χρησιμοποιείται μια ποσότητα μετάλλου με εμβαδόν S. Να αποδειχθεί ότι ο όγκος V του κουτιού γίνεται μέγιστος όταν ο λόγος του ύψους του προς τη διάμετρο της βάσεως του θα είναι 1:2.

Λύση

$$\left.\begin{array}{l} S = \pi R^2 + 2\pi R u \\ V = \pi R^2 u \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{R(S - \pi R^2)}{2}$$

Τότε $V' = \frac{S - 3\pi R^2}{2}$ και $V'' = -3\pi R < 0$

$V' = 0 \Leftrightarrow S = 3\pi R^2$

Αρα μέγιστος όγκος όταν $S = 3\pi R^2$

Οπότε $\pi R^2 + 2\pi R u = 3\pi R^2 \Rightarrow u = R$

Αρα $\frac{v}{\delta} = \frac{1}{2}$

Ασκήσεις 24, 25, 26 λυμένες

31, 32, 33, 35 άλυτες

Κυρτές - κοίλες συναρτήσεις

Πρόταση: Αν η συνάρτηση $f(\alpha,\beta)$ είναι παραγωγίσιμη τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

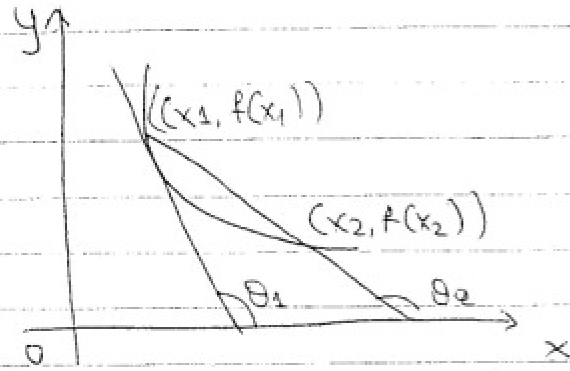
(i) f κυρτή

(ii) f' αύξουσα

(iii) $\forall\, x_1, x_2 \in (\alpha,\beta) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$

Αποδειξη σελ 271, 272, 273 (δεν θα την εχουμε)

Αντιστοιχη προταση για κοιλες



$$tg\,\theta_2 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{(iii)}{\geq} f'(x_1) = tg\,\theta_1$$

Το διάγραμμα της f σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της στηρίζεται πάνω στην εφαπτομένη της.

Πόρισμα: Αν η συναρτηση $f|(\alpha,\beta)$ εχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο τότε:

i) f κυρτή $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)$
ii) f κοίλη $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)$

Προταση
Αν η συνάρτηση $f|(\alpha,\beta)$ έχει πρώτη και δεύτερη παράγωγο τότε:
i) $f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta) \Rightarrow$ γνήσια κυρτή
ii) $f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta) \Rightarrow$ γνήσια κοίλη

Οχι αντίστροφο.
Παράδειγμα: $f(x) = x^4 | (-1,1)$ γνήσια κυρτη
ενώ $f''(0) = 0$

SKAG

Σημείο καμπής

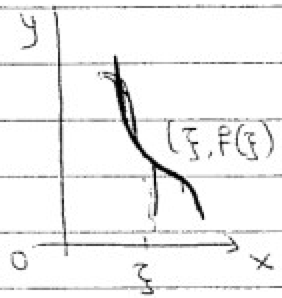
Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f|A$ και $\xi \in A$. Το σημείο $(\xi, f(\xi))$ ονομάζεται <u>σημείο καμπής</u> * της f όταν η συνάρτηση "αλλάζει κοίλα" στο σημείο αυτό δηλαδή

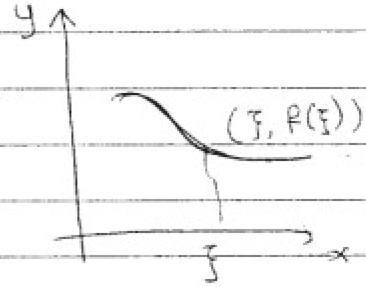
$\exists$ περιοχή $\Pi(\xi) = (\xi-\delta, \xi+\delta)$ με

$f\,|\,(\xi-\delta, \xi)$ κυρτή και $f|(\xi, \xi+\delta)$ κοίλη.

ή

$f\,|\,(\xi-\delta, \xi)$ κοίλη και $f|(\xi, \xi+\delta)$ κυρτή





Εύρεση σημείου καμπής

1. Αν $f|A$ έχει παραγώγους f', f'' στο A για να είναι το $\xi \in A^{o}$ θέση σημείου καμπής πρέπει $f''(\xi)=0$

Απόδειξη σαν άσκηση (εφαρμογή του Θ. Fermat για την f'

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

2. Αν $f|A$ έχει παραγώγους f', f'', f''' στο $(\alpha,\beta) \subseteq A$ και $\xi \in (\alpha,\beta)$ τότε αρκεί $f''(\xi)=0$ και $f'''(\xi) \neq 0$ για να είναι το ξ θέση σημείου καμπής

Απόδειξη σαν άσκηση ανάλογη με την σχετική πρόταση των ακροτάτων (κριτήριο 2)

Εφαρμογή

$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 10 \mid \mathbb{R}$

Είναι:

$f'(x) = 6x^2 + 12x + 5$

$f''(x) = 12x + 12$

$f'''(x) = 12$

Οπότε $f''(-1) = 0$ και $f'''(-1) = 12 \neq 0$

Άρα το σημείο $(-1, 9)$ είναι σημείο καμπής

Τύπος του Taylor

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $f \mid [\alpha,\beta]$ έχει $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} \mid [\alpha,\beta]$ συνεχείς και υπάρχει η $f^{(n+1)} \mid (\alpha,\beta)$ τότε $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ με:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Το ΘΜΤ είναι ειδική περίπτωση για $n=0$

Απόδειξη (χωρίς λεπτομέρειες)

Έστω M ο αριθμός που προκύπτει από τη σχέση:

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + (\beta-\alpha)^{n+1} \cdot M$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\exists\ \xi \in (\alpha,\beta)$: $\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = M}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g|[\alpha,\beta]$ με
$$g(x)=f(x)+\frac{\beta-x}{1!}f'(x)+\dots+\frac{(\beta-x)^n}{n!}f^{n}(x)+(\beta-x)^{n+1}M$$

Τότε θα είναι:

(i) g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

(ii) g παραγωγίσιμη στο (α,β) με
$$g'(x)=\frac{(\beta-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-(n+1)(\beta-x)^n M$$

(iii) $g(\alpha)=f(\beta)=g(\beta)$

Οπότε από το Θ Rolle $\exists$ $\xi\in(\alpha,\beta)$ με
$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=M$$

* Αλλά
$$g'(x)=f'(x)-f'(x)+(\beta-x)\cdot f''(x)-2\frac{\beta-x}{2}f''(x)+\frac{(\beta-x)^2}{2!}f^{(3)}(x)-\frac{3(\beta-x)^2}{3!}f''(x)+\dots+\frac{(\beta-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-\frac{n(\beta-x)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{(\beta-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-(n+1)(\beta-x)^n M$$

Άρα $g'(x)=\frac{(\beta-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-(n+1)(\beta-\xi)^n M$

Άρα για $x=\xi$ προκύπτει
$$0=\frac{(\beta-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)\cdot(\beta-\xi)^n M$$

Και επομένως $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=M$

*

Η παράσταση:
$$R_n=\frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

ονομάζεται υπόλοιπο Lagrange

Αν $P(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\dots+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)$

τότε από την πρόταση του Taylor προκύπτει:
$$f(\beta)=P(\beta)+R(n).$$

Γενικότερα αν εφαρμοσθεί ο τύπος του Taylor για την συνάρτηση $f|[x_0,x]$ όπου x_0 σταθερό και x τυχαίο προκύπτει:
$$f(x)=P(x)+R_n(x)$$

Όπου $P(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$

και $R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ όπου $\xi\in(x_0,x)$

πολυωνυμική προσέγγιση της f

Γενίκευση του Θ. Taylor.

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ έχει $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}/[\alpha,\beta]$ συνεχείς και υπάρχει η $f^{(n+1)}/(\alpha,\beta)$.

Τότε για $\kappa \in [n+1]$ $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ με

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + \frac{(\beta-\alpha)^\kappa (\beta-\xi)^{n-\kappa+1}}{\kappa n!} \cdot f$$

Το υπόλοιπο

$$R_n = \frac{(\beta-\alpha)^\kappa \cdot (\beta-1)^{n-\kappa+1}}{\kappa n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

έχει διάφορες μορφές.

Για $\kappa = n+1$. $\boxed{R_n^L = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi).}$

Lagrange.

Για $\kappa = 1$. $\boxed{R_n^C = \frac{(\beta-\alpha)(\beta-\xi)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi).}$

υπόλοιπο Cauchy.

Σειρά Taylor

Έχουμε,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + R_n(x)$$

Οπότε αν $R_n(x) \to 0$, τότε

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)} \to \text{σειρά Taylor}$$

Αν $x_0 = 0$ τότε προκύπτει:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \to \text{σειρά Maclaurin}$$

Παραδείγματα: Να αναπτυχθούν σε σειρές Maclaurin οι συναρτήσεις

i) $f(x) = e^x \mid \mathbb{R}$ ii) $f(x) = \sin x \mid \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \cos x \mid \mathbb{R}$ iv) $f(x) = \ln(1+x) \mid (-1,1)$

i) $f(x) = e^x \mid \mathbb{R}$

Ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Οπότε

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

όπου $0 < \xi < x$

Η ακολουθία $(R_n(x))$ συγκλίνει στο 0, διότι

$$\left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} e^{\xi}}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}} \right| = \frac{|x|}{n+2}$$

οπότε $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} \right| = 0 < 1$

Άρα θα είναι:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

SKMG

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

ii) $f(x) = \sin x \,|\mathbb{R}$

Ισχύει:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & n = 4k \\ \cos x, & n = 4k+1 \\ -\sin x, & n = 4k+2 \\ -\cos x, & n = 4k+3 \end{cases}$$

Οπότε,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Επειδή $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ έπεται $R_n(x) \to 0$

Άρα, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

διότι $f^{(2n)}(0) = 0$, ενώ $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

iii) Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Να εκφραστούν σε σειρές οι συναρτήσεις: υπερβολικό ημίτονο, υπερβολικό συνημίτονο.

iv) $f(x) = \ln(1+x) \ |(-1,1]$

1 περίπτωση $0 < x \leq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$f^{(4)}(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}$ Γενικά αποδεικνύεται ότι:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \forall \ n \in \mathbb{N}^*$$

Οπότε: $|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$ = όπου $0 < \xi < x$

$$= \left| \frac{(-1)^n n! \, x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} (n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1} < \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1}$$

Επειδή $0 < \frac{x}{1+\xi} < 1$ έπεται ότι $\left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{n+1} \to 0 \Rightarrow R_n(x) \to 0$.

Άρα $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ και

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \, x^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2 περίπτωση $-1 < x \leq 0$

Χρησιμοποιούμε ανάλογους συλλογισμούς εφαρμόζοντας το υπόλοιπο Cauchy (σελ. 280-281) αντί του υπολοίπου Lagrange

*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

* $|R_n(x)| = \left| \frac{x(x-\xi)^n \cdot f^{n+1}(\xi)}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}} \right| =$

$= \frac{|x|}{1+\xi} \cdot \frac{(\xi - x)^n}{1+\xi}$ όπου $x < \xi < 0$.

Ασκήσεις 29 λυμένη, 45, 47 άλυτες

Επειδή $0 < \frac{\xi - x}{1+x} < 1$ έπεται ότι $\left(\frac{\xi - x}{1+x} \right)^n \to 0 \Rightarrow R_n(x) \to 0$.

Αόριστο ολοκλήρωμα

Άρα $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \, x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \ \forall \ x \in (-1, 1]$

Έστω μια συνάρτηση f. Μια άλλη συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f όταν $F' = f$

- Αν F είναι παράγουσα της $f \Rightarrow F + c$ παράγουσα της f

• Αν F_1, F_2 δυο παράγουσες της $f \Rightarrow F_1 - F_2 = c$

Η συνάρτηση της οποίας ο τύπος περιέχει όλες τις παράγουσες της f ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της f και σημειώνεται με $\int f(x)\,dx$, δηλαδή

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$, όπου F είναι μια παράγουσα της f

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

1. $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad , a \neq -1$

2. $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$

3. $\int e^x\,dx = e^x + c \quad , \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad , \int \cos x\,dx = \sin x + c$

5. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tgx + c \quad , \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctgx + c$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$

7. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$

Ιδιότητες

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

3. $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

4. $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

5. $\int (f\circ\phi)(x)\cdot\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$

όπου $y=\phi(x)$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Δηλ. θέτοντας $y=\phi(x)$ είναι $dy=\phi'(x)dx$

Απόδειξη τύπου 5

Έστω F είναι μια παράγουσα της f

Τότε η συνάρτηση $F\circ\phi$ θα είναι παράγουσα $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ διότι

$(F\circ\phi)'(x) = F'(\phi(x))\cdot\phi'(x) = f(\phi(x))\cdot\phi'(x) = (f\circ\phi)(x)\phi'(x)$

Άρα,

$\int (f\circ\phi)(x)\cdot\phi'(x)\,dx = (F\circ\phi)(x)+c =$

$= F(\phi(x))+c = F(y)+c = \int f(y)d$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα

1. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$; 2. $\int \text{tg}x\,dx$, 3. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

① Θέτουμε $y=e^x+1$

Οπότε $dy=(e^x+1)'dx = e^x dx$

Άρα: $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\cdot e^x dx = \int \frac{y-1}{\sqrt{y}}dy =$

$= \int\sqrt{y}\,dy - \int\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int \psi^{1/2}dy - \int y^{-\frac{1}{2}}dy =$

$= \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2(e^x+1)^{1/2}+c$

SKAG

(2) Θέτουμε $\boxed{y=\cos x}$

Οπότε $dy = (\cos x)'dx = -\sin x\, dx$

Άρα $\int tgx\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{dy}{y} =$

$= -\ln|y| + c = -\ln|\cos x| + c$

(3) Θέτουμε $\boxed{y=\ln x}$

Οπότε $dy = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$

Άρα, $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{y}\, dy = \int y^{1/2} dy =$

$= \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} y^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2} + c$

Ασκήσεις: 1, 2, 3, 4, 5 λυμένες σελ 309
1, 3, 4, 5 άλυτες σελ 365

6. $\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$

Παραγοντική ολοκλήρωση ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Απόδειξη

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \Rightarrow$

$f(x) g'(x) = (f g)'(x) - f'(x) g(x) \Rightarrow$

$\int f(x) g'(x)\, dx = \int (fg)'(x)\, dx - \int f'(x) g(x)\, dx \Rightarrow$

$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$

SKAG

Ε... της μεθόδου

! Ζητείται να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$\int f(x) h(x)\,dx$

Για το σκοπό αυτό ευρίσκουμε μια παράγουσα μιας εκ των δύο συναρτήσεων του γινομένου και εφαρμόζουμε τον τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

$$\int f(x)h(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Προκειμένου το τελευταίο ολοκλήρωμα να είναι απλό πρέπει να αντικατασταθεί από την παράγουσά της η κατάλληλη συνάρτηση εκ των δύο του γινομένου

Ασκήσεις: 6, 7, 8 λυμένες
20, 21, 22, 25 άλυτες

1η περίπτωση: $\int P(x) \cdot \underline{e^{\alpha x+\beta}}\,dx$

Παράδειγμα: $I = \int (x^2-3x+5)\, e^{3x+1}\,dx$

$$I = \frac{1}{3}\int (x^2-3x+5)\,(e^{3x+1})'\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-3x+5)\,e^{3x+1} - \frac{1}{3}\int (x^2-3x+5)'\,e^{3x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-3x+5)\,e^{3x+1} - \frac{1}{3}\int (2x-3)\,(e^{3x+1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-3x+5)\,e^{3x+1} - \frac{1}{9}\int (2x-3)\,(e^{3x+1})'\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-3x+5)\,e^{3x+1} - \frac{1}{9}\left[(2x-3)\,e^{3x+1} + \frac{2}{9}\int e^{3x+1}\,dx =\right.$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-3x+5)\,e^{3x+1} - \frac{1}{9}(2x-3)\,e^{3x+1} + \frac{2}{27}\,e^{3x+1} + c$$

SKAG

2η Περίπτωση

$\int P(x)\,\underline{\cos(\alpha x+\beta)}\,dx$ ή $\int P(x)\,\underline{\sin(\alpha x+\beta)\,d}x$

Παραδείγματα

$I = \int (3x+5)\cos(2x+1)\,dx$, $J = \int (x^2+1)\sin(3x+5)\,dx$

$I = \frac{1}{2}\int (3x+5)\,[\sin(2x+1)]'\,dx =$

$= \frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1) - \frac{1}{2}\int (3x+5)'\sin(2x+1)\,dx =$

$= \frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1) - \frac{3}{2}\int \sin(2x+1)\,dx =$

$= \frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1) + \frac{3}{4}\cos(2x+1) + c$

3η Περίπτωση

$\int \underline{e^{\alpha x+\beta}}\cos(\gamma x+\delta)\,dx$ ή $\int \underline{e}^{\alpha x+\beta}\sin(\gamma x+\delta)\,dx$

Παραδείγματα

$I = \int e^{2x}\cos 3x\,dx$, $J = \int e^{4x}\sin(5x+3)\,dx$

$I = \frac{1}{2}\int (e^{2x})'\cos 3x\,dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}(\cos 3x)'\,dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int (e^{2x})'\sin 3x\,dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\left[e^{2x}\sin 3x - \int e^{2x}(\sin 3x)'\,dx\right] =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\,dx}_{I}$

2η Περίπτωση

$\int P(x)\,\underline{\cos(\alpha x+\beta)}\,dx$ ή $\int P(x)\underline{\sin(\alpha x+\beta)}\,dx$

Παραδείγματα

$I=\int (3x+5)\cos(2x+1)dx$, $J=\int(x^2+1)\sin(3x+5)dx$

$I=\frac{1}{2}\int(3x+5)[\sin(2x+1)]'dx=$

$=\frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1)-\frac{1}{2}\int(3x+5)'\sin(2x+1)dx=$

$=\frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1)-\frac{3}{2}\int\sin(2x+1)dx=$

$=\frac{1}{2}(3x+5)\sin(2x+1)+\frac{3}{4}\cos(2x+1)+c$

3η Περίπτωση

$\int \underline{e^{\alpha x+\beta}}\cos(\gamma x+\delta)dx$ ή $\int \underline{e^{\alpha x+\beta}}\sin(\gamma x+\delta)dx$

Παραδείγματα

$I=\int e^{2x}\cos 3x\,dx$, $J=\int e^{4x}\sin(5x+3)dx$

$I=\frac{1}{2}\int(e^{2x})'\cos 3x\,dx=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x-\frac{1}{2}\int e^{2x}(\cos 3x)'dx=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}\int(e^{2x})'\sin 3x\,dx=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}[e^{2x}\sin 3x-\int e^{2x}(\sin 3x)'dx]=$

$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}\underbrace{\int e^{2x}\cos 3x\,dx}_{I}$

Άρα $I + \frac{9}{4} I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x$

οπότε $I = \frac{1}{13} e^{2x} [2\cos 3x + 3\sin 3x] + c$

4η περίπτωση

$\int P(x) \ln x\, dx$ ή $\int P(x) \arcsin x\, dx$ ή $\int P(x) \arctan x\, dx$

Παραδείγματα

$I = \int (x^2+3x+5) \ln x\, dx$, $J = \int \arcsin x\, dx$

$T = \int (3x^2+6x-2) \arctan x\, dx$

$I = \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right)' \ln x\, dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) (\ln x)' dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{2}x + 5\right) dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx - \frac{3}{2}\int x\, dx - 5\int 1\, dx =$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x\right) \ln x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 5x + c$

$J = \int x' \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' dx =$

$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα τίθεται $y = 1-x^2$ οπότε $dy = (1-x^2)' dx = -2x\, dx$ και

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy =$

$= -\frac{1}{2} \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{y} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

SKAG

$$I = \int (x^3+3x^2-2x)' (\operatorname{arctg}x)\, dx =$$

$$= (x^3+3x^2-2x)\operatorname{arctg}x - \int (x^3+3x^2-3x)(\operatorname{arctg}x)'\, dx =$$

$$= (x^3+3x^2-2x)\operatorname{arctg}x - \int \frac{x^3+3x^2-2x}{x^2+1}\, dx$$

↑ ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

Αναγωγικοί τύποι

1. Αν $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

τότε ισχύει:

$$\boxed{I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}}$$

Πραγματικά,

$$I_n = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^n}\, dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\, dx =$$

$$= I_{n-1} - \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}\, dx =$$

$$= I_{n-1} - \frac{1}{2(-n+1)} \cdot \int x \left[(1+x^2)^{-n+1}\right]'\, dx =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\, dx\right] =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} =$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}$$

SKAG

2. Αν $I_n = \int (\ln x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$
τότε ισχύει:
$I_n = x(\ln x)^n - n I_{n-1}$

Πραγματικά,
$I_n = \int x' (\ln x)^n dx =$
$= x(\ln x)^n - \int x \left[(\ln x)^n \right]' dx =$
$= x(\ln x)^n - \int x \, n (\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx =$
$= x(\ln x)^n - n I_{n-1}$

3. Αν $S_n = \int \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$
τότε ισχύει:
$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-1}$

Πραγματικά
$S_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx =$
$= -\int \sin^{n-1} x \, (\cos x)' dx =$
$= -\sin^{n-1} x \cos x + \int [\sin^{n-1} x]' \cos x \, dx =$
$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$
$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) [S_{n-1} - S_n]$

Άρα
$n S_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) S_{n-2} \Rightarrow$
$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$

Άλλοι αναγωγικοί τύποι : σελ 309-310 Βιβλ. Θεωρ
Ασκήσεις 10,11 λυμένες

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Ειδική περίπτωση : $\int \frac{1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} dx$

SKAG

1. Αν $\Delta>0$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ και αναλύοντας σε απλά κλάσματα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1} = \int \frac{dx}{(2x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{2x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln|2x-1| - \ln|x+1|\right) + c$$

2. Αν $\Delta=0$ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2$

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int (x-2)^{-2}dx =$$

$$= \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

3. Αν $\Delta<0$, το τριώνυμο γίνεται τέλειο τετράγωνο συν μια θετική σταθερά

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

Έχουμε: $x^2+4x+13=(x+2)^2+9$

οπότε: $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + c$$

↑ με αντικατάσταση $y=\frac{x+2}{3}$

SKAG

Γενική περίπτωση $\int R(x)\,dx$ όπου $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x)$ πολυώνυμ

1ο βήμα: Αν βαθμός $Q(x) \leq$ βαθμός $P(x)$ τότε εκτελώντας την διαίρεσ
$P(x):Q(x)$ προκύπτει: $P(x)=\Pi(x)Q(x)+U(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R(x)=\Pi(x)+R_1(x)$$

όπου $R_1(x)+\frac{U(x)}{Q(x)}$

Ρητή συνάρτηση με βαθμό παρονομαστή μεγαλύτερο από το βαθμό τ
αριθμητή.

2ο βήμα: Αν βαθμός $Q(x) >$ βαθμό $P(x)$ αναλύουμε σε απλά
κλάσματα

Για παράδειγμα:
αν $Q(x)=(x-3)(x-2)^3(x^2+1)^2$

τότε $R(x) = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{(x-2)^2}+\frac{\Delta}{(x-2)^3}+\frac{Kx+\Lambda}{x^2+1}+\frac{Mx+N}{(x^2+1)^2}$

οπότε $\int R(x)\,dx = A\int\frac{dx}{x-3}+B\int\frac{dx}{x-2}+\Gamma\int\frac{dx}{(x-2)^2}+\Delta\int\frac{dx}{(x-2)^3}+$

$+K\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+\Lambda\int\frac{dx}{x^2+1}+M\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx+N\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Οπότε τα ολοκληρώματα που πρέπει να γνωρίζουμε είναι:

1. $$\int\frac{dx}{(x-a)^\nu}=\begin{cases}\frac{(x-a)^{-\nu+1}}{-\nu+1}+c, & \nu\neq 1\\ \ln|x-a|+c, & \nu=1\end{cases}$$

SKAG

2. $$\int \frac{x}{(x^2+1)^\nu}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c, & \nu \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c, & \nu = 1 \end{cases}$$

διότι θέτοντας $\boxed{y = x^2+1} \Rightarrow dy = 2x\,dx$ οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^\nu}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{y^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c \\ \frac{1}{2}\ln|y| + c \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c \\ \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \end{cases}$$

3. $J_\nu = \int \frac{dx}{(1+x^2)^\nu}$ από αναδρομικό τύπο

Παραδείγματα

1. $\int \frac{(x-1)}{(x+1)(x-2)^2}\,dx$

Γράφουμε:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + \Gamma(x+1)$$

Για $x = -1 \Rightarrow -2 = A(-1-2)^2 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{9}}$

SKAG

Για $x=2 \Rightarrow 1=\Gamma(2+1) \Rightarrow \boxed{\Gamma=\frac{1}{3}}$

Για $x=0 \Rightarrow -1=A\cdot 4+B(-2)+\Gamma \Rightarrow \boxed{B=\frac{2}{9}}$

Άρα

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2}dx = -\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2}+c$$

2. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+2)}$

Γράφουμε,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+2} \Rightarrow$$

$$1=A(x+1)(x^2+2)+B(x^2+2)+(\Gamma x+\Delta)(x+1)^2$$

και μετά από εκτέλεση πράξεων

$$1=(A+\Gamma)x^3+(A+B+2\Gamma+\Delta)x^2+(2A+2\Delta+\Gamma)x+2A+2B+\Delta$$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} A+\Gamma=0 \\ A+B+2\Gamma+\Delta=0 \\ 2A+2\Delta+\Gamma=0 \\ 2A+2B+\Delta=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{2}{9} \\ B=\frac{1}{3} \\ \Gamma=-\frac{2}{9} \\ \Delta=-\frac{1}{9} \end{array}\right.$$

$$\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$= \frac{2}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{9} \ln(x^2+2) - \frac{1}{9\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

Διότι $\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \overset{y=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}\, dy}{y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

Παραδ σελ 312, 313, 314
Ασκησεις 12 λυμ, 33 άλυτη

Ολοκλήρωση μη ρητών συναρτήσεων

1. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα
$\int A(\cos x, \sin x)\, dx$

i) Αν A περιττή ως προς $\cos x$ δηλαδή
$A(-\cos x, \sin x) = -A(\cos x, \sin x)$

Θέτουμε $\boxed{y = \sin x}$

Παράδειγμα
$\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$

$y = \sin x \Rightarrow dy = (\sin x)' dx = \cos x\, dx$
Οπότε, $\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx = \int (1-y^2) y^2 dy =$

$$= \int y^2 dy - \int y^4 dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + c =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

SKAG

ii) Αν A περιττή ως προς $\sin x$, δηλαδή
$A(\cos x, -\sin x) = -A(\cos x, \sin x)$
θέτουμε $y = \cos x$

Παράδειγμα
$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

Θέτουμε, $y = \cos x \Rightarrow dy = (\cos x)'dx \Rightarrow dy = -\sin x\,dx$

Οπότε, $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy =$

$= -\frac{y^{1/2}}{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c$

iii) Αν A άρτια ως προς $\cos x$ και $\sin x$ δηλαδή
$A(-\cos x, -\sin x) = A(\cos x, \sin x)$
θέτουμε $\boxed{y = tgx}$

Τύποι της τριγωνομετρίας που χρησιμοποιούνται:

$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}}$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}}$

Επιπλέον $\boxed{x = \operatorname{arctg} y}$

$dx = (\operatorname{arctg} y)'dy \Rightarrow$ και $\boxed{dx = \frac{dy}{1+y^2}}$

Παράδειγμα
$I = \int \frac{1+\cos^4 x}{\sin^4 x}\,dx$

Χρησιμοποιώντας τους προηγ. τύπους είναι:

$I = \int \frac{1 + \frac{1}{(1+y^2)^2}}{\frac{y^4}{(1+y^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,dy =$

$$= \int \frac{(1+y^2)^2+1}{y^4(1+y^2)}\,dy =$$

$$= \int \frac{dy}{1+y^2} + 2\int \frac{dy}{y^4} = \text{arctg}\,y - 2\,\frac{y^{-3}}{3} + c =$$

$$= x - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{tg^3 x} + c$$

iv) Για όλες τις άλλες περιπτώσεις

Θέτουμε $\boxed{y = tg\,\frac{x}{2}}$

Τύποι της τριγωνομετρίας που χρησιμοποιούνται:

$\boxed{\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}}$ $\boxed{\sin x = \frac{2y}{1+y^2}}$

Επιπλέον $\boxed{x = 2\,\text{arctg}\,y}$

και $dx = 2(\text{arctg}\,y)'dy \Rightarrow dx = \frac{2dy}{1+y^2}$

Παράδειγμα

$$I = \int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx$$

Χρησιμοποιώντας τους προηγ. τύπους είναι:

$$I = \int \frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2dy}{1+y^2} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+y^2+2y+1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2dy}{1+y^2} = \int \frac{1}{1+y}\,dy = \ln|1+y| + c =$$

$= \ln|1+tg\frac{x}{2}|+c$

Ασκήσεις: 14, 15 λυμένες, 34, 35(α) άλυτες

2. $\int A\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

Θέτουμε $\boxed{y = \sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}}$

Παράδειγμα: $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$

Θέτουμε $y = \sqrt[3]{x+1}$ οπότε $x = y^3-1$ και
$dx = (y^3-1)'dy = 3y^2dy$

Άρα, $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3y^2dy}{(y^3-1)y} = 3\int \frac{y}{y^3-1}dy =$

$= 3\int \frac{y}{(y-1)(y^2+y+1)}dy = \ldots$

Αν η παράσταση $\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$ εμφανίζεται σε περισσότερα του ενό[ς]
ριζικά εφαρμόζεται η ανακατάσταση

$$y = \sqrt[k]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

όπου k = ΕΚΠ των δεικτών των ριζών

Παράδειγμα: $I = \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$

Τίθεται: $\boxed{y = \sqrt[12]{x-1}}$

SKAG

Οπότε $x = y^{12}+1$ και $dx = 12y^{11}dy$

και

$$I = \int \frac{y^6 - y^3}{y^8} \cdot 12y^{11}\,dy =$$

$$= 12\left[\int y^9 dy - \int y^6 dy\right] =$$

$$= 12\left[\frac{y^{10}}{10} - \frac{y^7}{7}\right] =$$

$$= 12\left[\frac{(\sqrt[12]{x-1})^{10}}{10} - \frac{(\sqrt[12]{x-1})^7}{7}\right] + c$$

Ασκήσεις 17, 18 λυμένες

35 β, γ , 36 άλυτες σελ 374

3. $\int A(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma})\,dx$

1η Περίπτωση $\Delta \geq 0$

Θέτουμε $\boxed{\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = (x-\rho_1)y}$

όπου ρ_1 μια ρίζα του τριωνύμου

Παράδειγμα: $I = \int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους 1 και −3

Θέτουμε, $\boxed{\sqrt{-x^2-2x+3} = (x-1)y}$

Οπότε, $-x^2-2x+3 = (x-1)^2y^2 \Rightarrow$

$-(x-1)(x+3) = (x-1)^2y^2 \Rightarrow$

$-x-3 = (x-1)y^2$

SKAG

Επομένως

$\boxed{x = \frac{y^2-3}{y^2+1}}$ και $\boxed{dx = \frac{8y}{(y^2+1)^2}\, dy}$

Άρα, $J = \int \frac{\left(\frac{y^2-3}{y^2+1} - 3\right)}{\left(\frac{y^2-3}{y^2+1} - 1\right) y} \cdot \frac{8y}{(y^2+1)^2}\, dy =$

$= \int \frac{-2(y^2+3)}{-4} \cdot \frac{8}{(y^2+1)^2}\, dy =$

$= 4 \int \frac{y^2+3}{(y^2+1)^2}\, dy = 4 \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^2}\, dy + 8 \int \frac{dy}{(y^2+1)^2} =$

$= 4J_1 + 8J_2$

Οπότε $J_n = \frac{y}{2(n-1)(1+y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}$

Άρα $J = 4\,\mathrm{arctg}\, y + 8\left[\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, y\right] + c =$

$= \ldots$ συναρτήσει του x

2η περίπτωση $\Delta < 0$

Θέτουμε $\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma} = \sqrt{a}\,(x-y)$.

Παράδειγμα: $J = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Θέτουμε $\sqrt{x^2+x+1} = x-y$

οπότε $x^2+x+1=(x-y)^2 \Rightarrow$

$x^2+x+1 = x^2-2xy+y^2$

Επομένως

$$x=\frac{y^2-1}{2y+1} \quad \text{και} \quad dx=\frac{2(y^2+y+1)}{(2y+1)^2}dy$$

Άρα

$$I=\int \frac{2\frac{y^2+y+1}{(2y+1)^2}dy}{\frac{y^2-1}{2y+1}\left(\frac{y^2-1}{2y+1}-y\right)} =$$

$$=\int \frac{2\frac{y^2+y+1}{(2y+1)^2}dy}{\frac{y^2-1}{2y+1}\cdot\frac{-(y^2+y+1)}{2y+1}} =$$

$$=-2\int\frac{1}{y^2-1}dy=\int\frac{1}{1+y}dy+\int\frac{1}{1-y}dy=$$

$$=\ln|1+y|-\ln|1-y|+c=\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+c=$$

$= \dots$ συναρτήσει του x

Ειδικές περιπτώσεις:

$\int A(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ ή $\int A(x, \sqrt{x^2+a^2})\,dx$ θέσε $\Rightarrow$ $\boxed{x=a\cosh y}$, $\boxed{x=a\sinh y}$

Παράδειγμα: $I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$

SKAG

Θέτουμε $\boxed{x=\cosh y}$ όπου $y>0$

Τότε

$x^2-1=\cosh^2 y-1=\sinh^2 y$

και

$dx=(\cosh y)'dy=\sinh y\,dy$

Άρα,

$I=\int \frac{\sinh y}{\cosh^2 y}\cdot\sinh y\,dy=\int\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}dy=\int\frac{\cosh^2 y-1}{\cosh^2 y}dy=$

$=\int\left(1-\frac{1}{\cosh^2 y}\right)dy=y-\tgh y+c=$

$=\operatorname{arccosh} x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

Ασκήσεις : 19 λυμένη

37 άλυτη

4. Διώνυμα ολοκληρώματα

$\int x^k(ax^\lambda+b)^\mu dx$

όπου $k,\lambda,\mu\in\mathbb{Q}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1η περίπτωση $\boxed{\mu\in\mathbb{Z}}$

Θέτουμε $x=y^\rho$

όπου $\rho=$ ΕΚΠ των παρονομαστών των k,λ.

Παράδειγμα: $I=\int\sqrt[5]{x^3}\left(\sqrt[4]{x^5}-1\right)^2dx$

SKAG

Είναι $I = \int x^{3/5} (x^{5/4} - 1)^2 dx$

δηλαδή $\kappa = \frac{3}{5}$, $\lambda = \frac{5}{4}$ και $\mu = 2 \in \mathbb{Z}$

Τίθεται $x = y^{20} \Rightarrow dx = 20 y^{19} dy$

Οπότε $I = \int y^{12} (y^{25} - 1)^2 \cdot 20 y^{19} dy = \ldots$

2η περίπτωση

$$\frac{\kappa + 1}{\lambda} \in \mathbb{Z}$$

Αν $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ όπου $(\gamma, \delta) = 1$

Θέτουμε $\alpha x^{\lambda} + \beta = y^{\delta}$

Παράδειγμα: $I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x} dx$

Είναι $I = \int x^{-1} (x^{1/2} + 1)^{1/3} dx$

δηλαδή $\kappa = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\mu = \frac{1}{3}$

όπου $\frac{\kappa + 1}{\lambda} = 0 \in \mathbb{Z}$

Τίθεται $\boxed{x^{1/2} + 1 = y^3}$

Άρα $x = (y^3 - 1)^2$ και $dx = 6y^2 (y^3 - 1) dy$

Οπότε,
$$I = \int \frac{y \cdot 6y^2 (y^3 - 1) dy}{(y^3 - 1)^2} = 6 \int \frac{y^3}{y^3 - 1} dy = \ldots$$

3η περίπτωση $\boxed{\frac{k+1}{\lambda}+\mu \in \mathbb{Z}}$

Αν $\mu=\frac{\gamma}{\delta}$ όπου $(\gamma,\delta)=1$

Θέτουμε $a+\frac{\beta}{x^{\lambda}}=y^{\delta}$.

Παράδειγμα: $I=\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx$

Είναι $I=\int x^{-2}(x^3+1)^{1/3}\,dx$

δηλαδή $k=-2$, $\lambda=3$ και $\mu=\frac{1}{3}$

με $\frac{k+1}{\lambda}+\mu=\frac{-2+1}{3}+\frac{1}{3}=0\in\mathbb{Z}$

Τίθεται $\boxed{1+\frac{1}{x^3}=y^3}$

Οπότε $x=(y^3-1)^{-\frac{1}{3}}$ και

$$dx=-\frac{1}{3}\cdot 3y^2(y^3-1)^{-4/3}dy=-y^2(y^3-1)^{-4/3}dy$$

Άρα,

$$I=\int (y^3-1)^{2/3}\,y\,(y^3-1)^{-\frac{1}{3}}\left(-y^2(y^3-1)^{-4/3}dy\right)=$$

$$=-\int \frac{y}{y^3-1}\,dy=\dots$$

Ασκήσεις 20 λυμένη

38 άλυτη

Διαφορικές εξισώσεις

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x, την άγνωστο συνάρτηση y και τις παραγώγους αυτής ονομάζεται <u>διαφορική εξίσωση</u>.

Γενική μορφή: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

<u>Τάξη</u>: Η μεγαλύτερη τάξη που εμφανίζεται η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης στην διαφορική εξίσωση.

<u>Βαθμός</u>: Ο μεγαλύτερος εκθέτης της παραγώγου που εκφράζει η τάξη της

Παραδείγματα:

(1) $(y'')^3 + 2y'' - 2y^3 = x\cos^3 x$

δευτέρας τάξης, τρίτου βαθμού

(2) $3x(y''')^2 - 2x^2 y'' + 8e^x y'' = 4\sin x$

τρίτης τάξης, δευτέρου βαθμού

Λύση ή ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει =

Γενική λύση: Είναι η λύση, ο τύπος της οποίας περιέχει όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα:

1) Η $y = e^x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

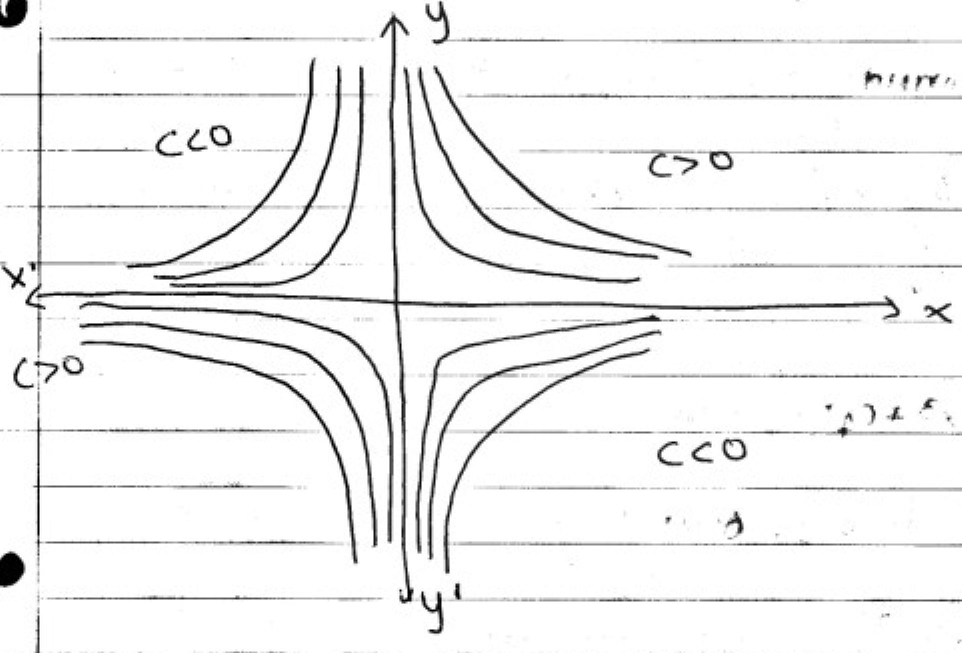
SKAG

2. Η $y=\frac{c}{x}$, $c\in\mathbb{R}$ είναι γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:
$y'=-\frac{y}{x}$

Καμπύλη ολοκληρώσεως ή ολοκληρωτική γραμμή: Είναι κάθε επίπεδη καμπύλη που αντιστοιχεί σε λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα: $\boxed{y'=-\frac{y}{x}}$ με γεν. λύση $\boxed{y=\frac{c}{x}}$

Οι καμπύλες ολοκληρώσεως είναι υπερβολές.



Οι υπερβολές $y=\frac{c}{x}$

Χωριζομένων μεταβλητών

$$A(x)\,dx+B(y)\,dy=0$$

Παραδείγματα:

1. $y^2y'-4x=0$.

Έχουμε ισοδύναμα:

SKAG

$y^2 dy - 4x dx = 0$

$\int y^2 dy = \int 4x\, dx$

$\frac{y^3}{3} = 2x^2 + c$

$\boxed{y = \sqrt[3]{6x^2 + 3c}}$ όπου $c \in \mathbb{R}$

2: $\frac{x}{y} \cdot y' = 3$, $x > 0$ και $y(1) = 2$

Έχουμε ισοδύναμα:

$\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = 3$

$\int \frac{dy}{y} = \int 3 \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln x^3 + c_1$, όπου $c_1 \in \mathbb{R}$.

$\ln|y| = \ln x^3 + \ln c_2$, όπου $c_2 > 0$

$\ln|y| = \ln(c_2 x^3)$

$|y| = c_2 x^3$

$y = \pm c_2 x^3$

$y = cx^3$ όπου $c \in \mathbb{R}^*$

$y(1) = 2 \Leftrightarrow c \cdot 1^3 = 2 \Leftrightarrow c = 2$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι:

$\boxed{y = 2x^3}$

SKAG

B: 110 άσκηση 40 (άλυτη)

Να λυθεί η δ. εξίσ. $\boxed{(x^2-y^4)dy - xydy=0}$
με τη βοήθεια του μετασχηματισμού:
$t = x^{-2}y^4$

<u>Λύση</u>: Προφανώς η $y=0$ είναι μιά λύση

Έτσι για $y\neq 0$ ισχύει $t = x^{-2}y^4 > 0$
Έχουμε $y = t^{1/4}\cdot x^{1/2}$ και

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}x^{1/2}\frac{dt}{dx} + \frac{1}{2}t^{1/4}x^{-\frac{1}{2}}$$

Άρα η δοσμένη δ.ε γίνεται:

$$(x^2 - tx^2)\left(\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}x^{1/2}\frac{dt}{dx} + \frac{1}{2}t^{1/4}x^{-\frac{1}{2}}\right) = x\,t^{1/4}\cdot x^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$x^2(1-t)\,t^{1/4}\,x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}t^{-1}x\cdot\frac{dt}{dx} + \frac{1}{2}\right) = x^{3/2}\cdot t^{1/4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-t}{t}\times\frac{dt}{dx} + 2(1-t) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-t}{t}\times\frac{dt}{dx} = 2(1+t) \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{1-t}{t(1+t)}dt = 2\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)dt = 2\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$\ln t - 2\ln(1+t) = 2\ln|x| + \ln c \Leftrightarrow$ όπου $c>0$

$$\ln\left[\frac{t}{(1+t)^2}\right] = \ln(cx^2) \Leftrightarrow$$

$\frac{t}{(1+t^2)} = Cx^2 \Leftrightarrow \frac{x^{-2}y^4}{(1+x^{-2}y^4)^2} = Cx^2$ όπου $C \geq 0$

Ασκήσεις : 39, 41, 42, 43 <u>άλυτες</u>

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$

όπου A, B είναι ομογενείς συναρτήσεις ίδιου βαθμού.

Μια συνάρτηση f δυο μεταβλητών ονομάζεται ομογενής βαθμού κ αν

$\boxed{f(tx, ty) = t^k \cdot f(x,y)}$

Παράδειγμα

$f(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y + 3\frac{y^5}{x} + 5y^3x$

Ανάγεται σε χωριζόμενων μεταβλητών με τον μετασχηματισμό.

$\boxed{y = ux}$

Παράδειγμα:

$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$ (1)

Θέτουμε : $y = xu$

οπότε $dy = udx + xdu$

Οπότε η (1) γίνεται:

$(x^2 - 2x^2u^2)dx + x \cdot ux(udx + xdu) = 0$

$(1 - 2u^2)dx + u^2dx + uxdu = 0$

$(1 - u^2)dx + uxdu = 0$ (2)

SKAG

Άνω κάτω άθροισμα

Έστω $f:[\alpha,\beta]$ φραγμένη συνάρτηση και $\delta \in \Delta([\alpha,\beta])$ με
$\delta = (x_i)_{i=0,1,\dots,n}$

Ορίζουμε,

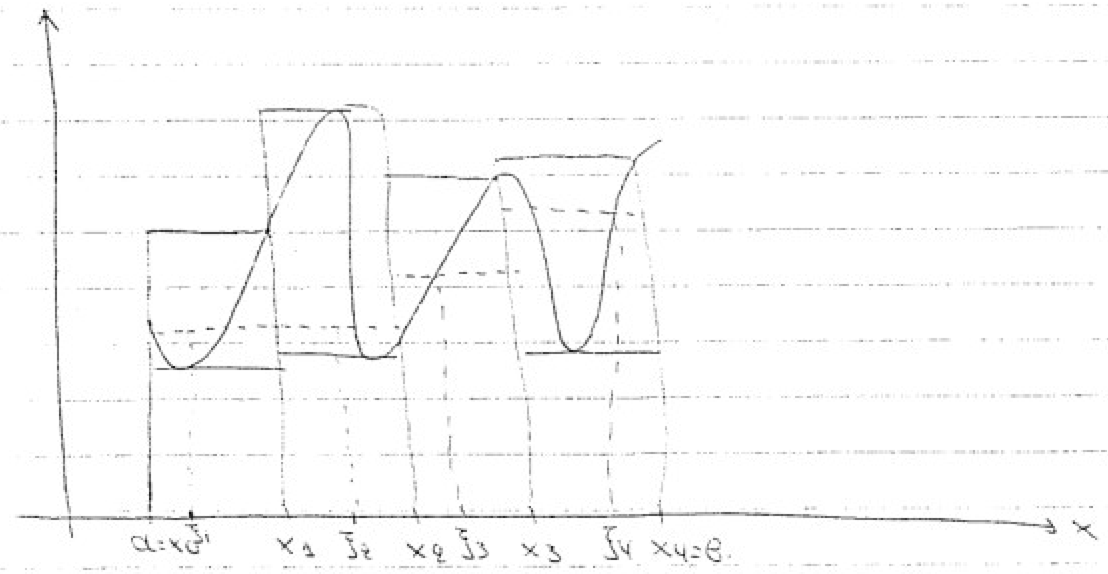
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ μήκος του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$.

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ όπου $i = 1, 2, \dots, n$.

$\underset{\text{άνω}}{U}(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ άνω άθροισμα

$L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ κάτω άθροισμα



$U(f,\delta)$ άνω άθροισμα

$L(f,\delta)$ κάτω άθροισμα

$S(f,\delta,\xi)$ ενδιάμεσο άθροισμα (διακεκομμένο)

Ενδιάμεσα αθροίσματα

Αν $\xi = (\xi_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της διαμέρισης $\delta = (x_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$

Ορίζουμε

$$S(f, \delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Ενδιάμεσο άθροισμα της συναρτήσεως f για την διαμέριση δ και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ.

Ιδιότητες

1. $m(b-a) \leq L(f, \delta) \leq S(f, \delta, \xi) \leq U(f, \delta) \leq M(b-a)$

2. $L(-f, \delta) = -U(f, \delta)$ και
   $U(-f, \delta) = -L(f, \delta)$

3. $L(f, \delta') \leq L(f, \delta)$ και
   $U(f, \delta') \geq U(f, \delta)$ αν δ είναι λεπτότερη της δ'

4. $L(f, \delta_1) \leq U(f, \delta_2)$
   για κάθε $\delta_1, \delta_2 \in \Delta([a, b])$

Αποδείξεις στις ασκήσεις

Υπόδειξη: Εφαρμογή της 3 δύο φορές για τις (δ_1, δ) και (δ_2, δ)

Άνω - κάτω ολοκλήρωμα

$U(f) = \inf \{ U(f,\delta) : \delta \in \Delta([a,b]) \}$

άνω ολοκλήρωμα

$L(f) = \sup \{ L(f,\delta) : \delta \in \Delta([a,b]) \}$ κάτω ολοκλήρωμα

Προφανώς ισχύει : $\boxed{L(f) \leq U(f)}$

Αν ισχύει ισότητα δηλ. $L(f) = U(f)$
τότε η f ονομάζεται <u>ολοκληρώσιμη</u> η δε κοινή τιμή ορισμένο ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Τα a, b ονομάζονται άκρα του ολοκληρώματος.
- Αν $b \leq a$ ορίζεται:
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ όταν $b < a$ και $\int_b^a f(x)\,dx = 0$

Παράδειγμα μη ολοκληρώσιμου συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} p, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ q, & x \in [a,b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$ όπου $q < p$

Πραγματικά

$$U(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = p \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = p(b-a)$$

$$L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = q \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = q(b-a)$$

Άρα
$L(f) = q(b-a) < p(b-a) = U(f)$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση:
$f(x) = x-4 \,|\, [1,3]$ είναι ολοκληρώσιμη και να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμά της.

Λύση: Έστω $n \in \mathbb{N}^*$
Χωρίζουμε το διάστημα $[1,3]$ σε n ίσα ευθύγραμμα τμήματα με τη βοήθεια της διαμέρισης

$$\delta_n = (x_i^n) \quad i=0,1,\dots,n$$

Προφανώς, $\Delta x_i^n = \frac{2}{n}$, $\forall i=1,2,\dots,n$
Επιπλέον, $x_i^n = 1+\frac{2i}{n}$ $\forall i=1,2,\dots,n$

Θα δειχθούν:

$$\boxed{U(f,\delta_n) = 2\frac{n+1}{n} - 6} \quad \text{και} \quad \boxed{L(f,\delta_n) = 2\frac{n-1}{n} - 6}$$

$$U(f,\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^n)\, \Delta x_i^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^n - 4)\, \Delta x_i^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n} - 4\right)\frac{2}{n} =$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} - 3\right) =$$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i - 3\sum_{i=1}^{n} 1\right] =$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n}\, 3n =$$

$= 2\frac{n+1}{n} - 6$

Ανάλογη αποδ. για τον άλλο τύπο.

Έτσι προκύπτει:

$2\frac{n-1}{n} - 6 = L(f,\delta_n) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f,\delta_n) = 2\frac{n+1}{n} - 6$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\left[2\frac{n-1}{n} - 6\right] =$

$= \lim_{n\to\infty}\left[2\frac{n+1}{n} - 6\right] = -4$

Έπεται ότι $f|[1,3]$ είναι ολοκληρώσιμη με

$\int_1^3 f(x)dx = -4$

Παραδ. σελ 356-357
Ασκ 1,2 λυμ.
1,2 άλυτες

Κριτήρια ολοκληρώσεως

Θεώρημα (Riemann)
f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists\ \delta \in \Delta([a,b])$ με $U(f,\delta) - L(f,\delta) < \varepsilon\ (*)$

Απόδειξη
"$\Rightarrow$" Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη

Για $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta_1, \delta_2 \in \Delta([a,b])$
$U(f,\delta_1) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

$$L(f,\delta_2) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Αν τεθεί $\delta = \delta_1 \cup \delta_2$ τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} U(f,\delta) - L(f,\delta) &\le U(f,\delta_1) - L(f,\delta_2) \\ &< \left(U(f) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= U(f) - L(f) + \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"

Υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (*) και θα δείξουμε ότι $U(f) = L(f)$

Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ είναι:

$$L(f) \le U(f) \le U(f,\delta) < L(f,\delta) + \varepsilon < L(f) + \varepsilon$$

Άρα, $L(f) \le U(f) < L(f) + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$0 \le U(f) - L(f) < \varepsilon \quad , \forall \varepsilon > 0.$$

Πρόταση

Κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη

Έστω $f[a,b]$ είναι αύξουσα (ανάλογα αποδεικνύεται για φθίνουσα) και $f(a) < f(b)$ (αλλιώς θα ήταν σταθερή οπότε ολοκληρώσιμη)

Θα εφαρμοσθεί το Θ. Riemann

Έστω $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε μία διαμέριση

$\delta(x_i)\ i = 0,1,\dots,n$ με $\lambda(\delta) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$

Έχουμε,

$$U(f,\delta) - L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - (f(x_{i-1})] \lambda(\delta)$$

$$= \lambda(\delta) \sum_{i=1}^{n} [(f(x_i) - f(x_{i-1})] =$$

$$= \lambda(\delta) [(f(\beta) - f(a))] < \varepsilon$$

Προταση:
Καθε συνεχης συναρτηση ειναι ολοκληρωσιμη

Αποδειξη
Αν $f|[a,\beta]$ συνεχης τοτε θα ειναι ομαλα συνεχης, δηλαδη
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \theta > 0 \quad \forall x, y \in [a,\beta]$:

$$|x-y| < \theta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\beta - a}$$

Θεωρουμε μια διαμεριση $\delta = (x_i)$ $i = 0, 1, \ldots, n$
του $[a,\beta]$ με $\lambda(\delta) < \theta$

Απο το θεωρημα του Weirstrass προκυπτει οτι:

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(t_i)$
και
$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(z_i)$

οπου $t_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$

Οποτε,

$$U(f,\delta) - L(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(z_i)] \Delta x_i$$

$$\overset{*}{<} \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

* διοτι $t_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ οποτε
$|t_i - z_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq \lambda(\delta) < \theta$

Οποτε, συμφωνα με την ομαλή συνεχεια προκυπτει οτι

$$|f(t_i) - f(z_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Πρόταση: Για καθε $f|[a,b]$ συνεχή

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \delta_n, \xi_n)$$

όπου (δ_n) ειναι μια ακολουθια διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\lambda(\delta_n) \to 0$ και ξ_n μια οποιαδήποτε επιλογή ενδιαμεσων σημειων της δ_n

Αποδειξη
Στην προηγ. πρόταση ουσιαστικά αποδειχθηκε ότι:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0, \ \exists \theta>0 \text{ με } U(f,\delta) - L(f,\delta) < \varepsilon \\ \text{για καθε } \delta \in \Delta([a,b]) \text{ με } \lambda(\delta) < \theta \end{array}} \ (*)$$

Έτσι επειδή $\lambda(\delta n)\to 0$ εφαρμόζοντας τον ορισμό της μηδενικής ακολουθίας για $\theta>0$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}^*: \lambda(\delta n)<\theta\ \forall\, n\geq n_0$

Οπότε από το (*) προκύπτει ότι:

$$U(f,\delta n)-L(f,\delta n)<\varepsilon\ ,\forall\, n\geq n_0$$

Επιπλέον,

$$\left.\begin{array}{l} L(f,\delta n)\leq S(f,\delta n,\xi n)\leq U(f,\delta n) \\ L(f,\delta n)\leq \int_a^b f(x)dx\leq U(f,\delta n)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left|S(f,\delta n,\xi n)-\int_a^b f(x)dx\right|\leq U(f,\delta n)-L(f,\delta n)<\varepsilon\quad \forall\, n\geq n_0$$

Άρα, $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty} S(f,\delta n,\xi n)$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με τη βοήθεια της προηγούμενης προτάσεως το ορισμένο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως $f(x)=x^2 \mid [0,1]$

Λύση

Επειδή $f|[0,1]$ συνεχής μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγ. πρόταση. Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ορίζουμε $\delta n\in\Delta([0,1])$ και ξn επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δn:

$$\delta n=(x_i^n)\ i=0,1,\dots,n\qquad \xi n=(\xi_i^n)\ i=1,2,\dots,n$$

$$x_0^n=0,\ x_i^n=\xi_i^n=\frac{i}{n}\quad \forall\, i=1,2,\dots,n$$

Οπότε $\Delta x_i^n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ και

$\lambda(\delta_n) = \frac{1}{n} \to 0$. Επιπλέον

$$S(f, \delta_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)\, \Delta x_i^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Άρα, $\int_0^1 x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \delta_n, \xi_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Βασικές ιδιότητες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

1. Αν $f|[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $\lambda \cdot f|[a,b]$ θα είναι επίσης ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Αν $f, g|[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η συνάρτηση $f+g$ θα είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

5. Αν $f,g|[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε θα είναι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

4. Αν η συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε για $c\in[\alpha,\beta]$ είναι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)\,dx$

σχέση του Chasles

Οι αποδ. σαν ασκήσεις. Βιβλίο θεωρίας σελ 364, 365, 366

Θεώρημα
Αν $f|[\alpha,\beta]$ ολοκληρώσιμη με
$R(f)\subseteq[\kappa,\lambda]$ και $\Phi|[\kappa,\lambda]$ συνεχής τότε η συνάρτηση
$\Phi\circ f|[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Εφαρμογές
1) Αν $f,g|[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και οι συναρτήσεις $f^2, g^2, f\cdot g|[\alpha,\beta]$ είναι επίσης ολοκληρώσιμες.

Πραγματικά, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα για $\Phi(x)=x^2$, τότε η $f^2=\Phi\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης από τη σχέση

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

προκύπτει ότι η $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη.

Ανισότητα του Schwartz

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)dx\right)\left(\int_\alpha^\beta g^2(x)dx\right)$$

για κάθε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f,g|[\alpha,\beta]$

Για την αποδ. βλέπε ασκ. 13 λυμένη

Εφαρμογή: άσκηση 14 λυμένη

2. Αν $f|[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $|f|\,|[a,b]$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη και

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Πραγματικά, αν εφαρμόσαμε το θεώρημα για $\varphi(x)=|x|$ τότε η $|f|=\varphi\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$f(x) \leq |f|(x)$, $\forall\, x\in[a,b] \Rightarrow$
$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ και

$-f(x) \leq |f|(x)$ $\forall\, x\in[a,b] \Rightarrow$

$\int_a^b -f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Άρα, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

S.O.S. Ολοκλήρωση - Παραγώγιση

Θεώρημα (Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Αν η συνάρτηση $f|[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $F|[a,b]$ με $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ είναι ομαλά συνεχής

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi\in(a,b)$ τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και ισχύει:
$F'(\xi)=f(\xi)$

Παρατηρηση

Καθε συνεχης συναρτηση $f|[a,b]$ έχει μια παραγουσα.

<u>Απόδειξη</u>

Εστω $x, y \in [a,b]$ με $x<y$ τοτε θα είναι:

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt$$

$$\leq M\int_x^y 1\, dt = M(y-x)$$

όπου $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$

Ομοιως,

$|F(x)-F(y)| \leq M(x-y)$ όταν $x>y$

Ετσι, γενικα ισχύει:

$|F(x)-F(y)| \leq M|x-y| \quad \forall\ x,y \in [a,b]$

Για $\varepsilon>0$ εκλέγεται $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ οπότε θα είναι

$|x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)| < M\delta = \varepsilon$

Άρα $F|[a,b]$ είναι ομαλα συνεχης

Εστω τώρα ότι η f είναι συνεχης στο ξ, δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : \begin{matrix} t\in[a,b] \\ |t-\xi|<\delta \end{matrix} \Rightarrow |f(t)-f(\xi)|<\varepsilon$$

Θα δειχθει ότι: $\boxed{F'_+(\xi) = f(\xi)}$ *

(αναλογα αποδεικνύεται ότι $F'_-(\xi) = f(\xi)$)

σελ.

Για $x \in (a, b)$ με $\xi < x$ και $|x-\xi| < \delta$ είναι:

$$\left| \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} - f(\xi) \right| = \left| \frac{F(x)-F(\xi)-(x-\xi)f(\xi)}{x-\xi} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_\xi^x f(t)dt - \int_\xi^x f(\xi)dt}{x-\xi} \right| =$$

$$= \left| \frac{\int_\xi^x (f(t)-f(\xi))dt}{x-\xi} \right| \leq \int_\xi^x \frac{|f(t)-f(\xi)|dt}{x-\xi}$$

$$\overset{\text{λόγω } (*)}{\leq} \frac{\int_\xi^x \varepsilon \, dt}{x-\xi} = \varepsilon$$

Άρα $F_1'(\xi) = f(\xi)$

Θεώρημα (Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Αν η συνάρτηση $f|[a,b]$ είναι συνεχής και $F|[a,b]$ είναι μια παράγουσα της ισχύει:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $F_1(x) = \int_a^x f(t)dt \; |[a,b]$ η οποία είναι μια παράγουσα της f. Οπότε θα υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$

$$F(x) - F_1(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$$

Έτσι για $x=a \Rightarrow F(a)-F_1(a) = c \Rightarrow F(a)=c$

ενώ για $x=b \Rightarrow F(b)-F_1(b)=c \Rightarrow F(b) - \int_a^b f(x)dx = F(a)$

Οπότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Παρατήρηση

Με τη βοήθεια του 2ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού υπολογίζονται τα ορισμένα ολοκληρώματα με την βοήθεια των αορίστων ολοκληρωμάτων. Δηλαδή αρχικά βρίσκεται το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int f(x)dx$
και μετά
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Παράδειγμα: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx$

Αν τεθεί $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x\, dx$
Οπότε, $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c =$

$= \frac{\sin^3 x}{3} + c$

Άρα $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx =$

$= \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

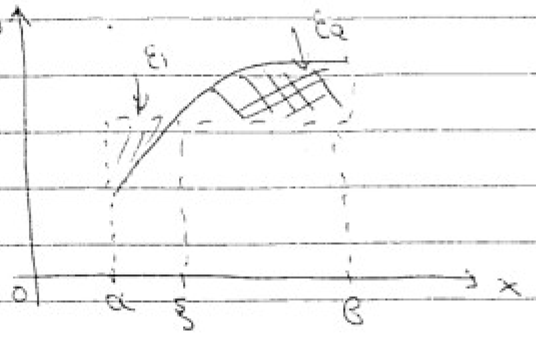
Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Αν η συνάρτηση $f|[a,b]$ είναι συνεχής τότε $\exists$ (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a,b)$ με $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,(f(\xi))$

Η ποσότητα $\boxed{\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$ ονομάζεται μέση τιμή

Οπότε, ισοδύναμη μορφή του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού: $\bar{f} = f(\xi)$

Γεωμετρική ερμηνεία:



$y = f(x)$

$E_1 = E_2$

1η Απόδειξη
Επειδή $f \mid [a,b]$ είναι συνεχής εφαρμόζεται το Θ. Weierstrass οπότε $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$ με

$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ και
$f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

Οπότε
$$f(x_1)\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_2)\,(b-a)$$

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq f(x_2)$$

Αν εφαρμοσθεί το Θ. Bolzano για τον περιορισμό της f στο διάστημα με άκρα x_1, x_2 προκύπτει ότι θα υπάρχει ξ μεταξύ των x_1, x_2 με

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

2η Απόδειξη
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \mid [a,b]$$

η οποία είναι μια παράγουσα της f
(σύμφωνα με το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)

Αν εφαρμοσθεί το Θ. Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού για την συνάρτηση F προκύπτει θα υπάρχει $\xi \in (a,\beta)$ με

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta)-F(a)}{\beta-a} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi) = \frac{\int_a^\beta f(x)dx}{\beta-a}$$

Γενίκευση Θεωρήματος: Άσκηση 4 λυμένη
Εφαρμογή Γενίκευσης: Άσκηση 5 λυμένη
Άλυτες Ασκήσεις: 8, 27, 28

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ζητείται να ευρεθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:
$\int_a^\beta f(x)dx$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x=\phi(t)$
όπου ϕ παραγωγίσιμη, 1-1 συνάρτηση

Τότε θα είναι:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$
όπου $a=\phi(\gamma)$ $\beta=\phi(\delta)$

Απόδειξη
Έστω F μια παράγουσα της f. Τότε η συνάρτηση $F\circ\phi$ θα είναι παράγουσα της $(f\circ\phi)\phi'$ διότι,

$$(F\circ\phi)'(t) = F'(\phi(t))\,\phi'(t) = f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$$

Επιπλέον
$$\boxed{\int_a^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(a)} \quad (1)$$

$$\boxed{\int_\gamma^\delta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = (F\circ\phi)(\delta) - (F\circ\phi)(\gamma)} \quad (2)$$

ΣΤΑΘ

Επειδή $F(\beta)-F(\alpha) = F(\phi(\delta)) - F(\phi(\gamma))$ έπεται ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

Παραδείγματα

(i) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, όπου $a>0$

Θέτουμε $x = a\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Τότε θα είναι , $dx = a\cos t\,dt$ και

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a|\cos t| = a\cos t$$

Άρα,

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cos t\; a\cos t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right)\right] = \frac{a^2\pi}{2}$$

(ii) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

Θέτουμε $y=e^x$ οπότε $x=\ln y \Rightarrow$

$$dx = (\ln y)'\,dy = \frac{dy}{y}$$

Επιπλέον για $x=0 \Rightarrow y=1$

για $x=1 \Rightarrow y=e$

Άρα, $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_1^e \frac{y-1}{y+1}\,\frac{dy}{y} =$

$= \int_1^e \left(\frac{2}{y+1} - \frac{1}{y}\right) dy =$

$= 2\,[\ln(y+1)]_1^e - [\ln y]_1^e =$

$= 2\ln(e+1) - 2\ln 2 - \ln e + \ln 1 =$

$= 2\ln(e+1) - 2\ln 2 - 1$

Ασκήσεις 6, 9, 10, 11, 12 λυμένες
7, 9, 13 άλυτες

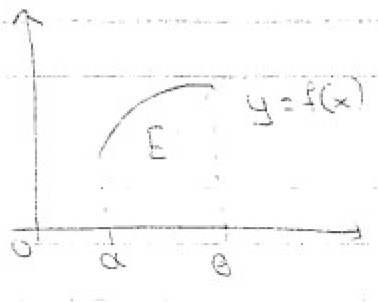
Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int_a^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx = [(f(x)\cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)\,dx$$

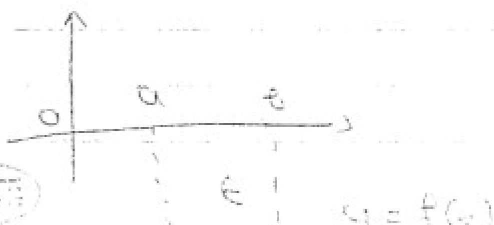
Ασκήσεις 7, 8, 15 λυμένες
5, 6 άλυτες

Εμβαδά

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,\beta] \Rightarrow \boxed{E = \int_a^\beta f(x)\,dx}$

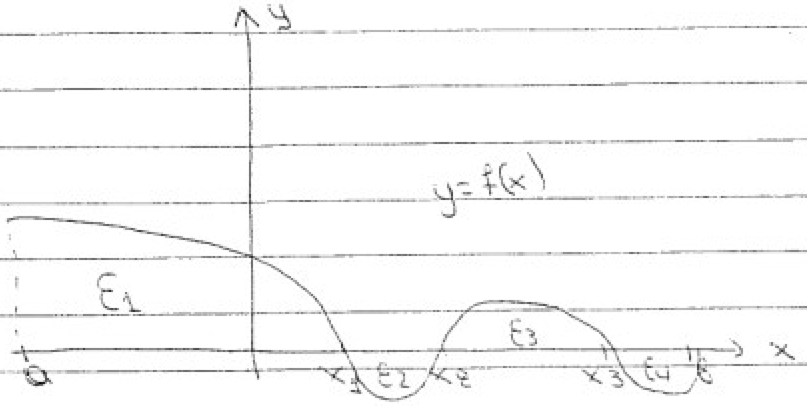


2. $f(x) \leq 0, \ \forall\, x \in [a,\beta] \Rightarrow E = -\int_a^\beta f(x)\,dx$



3 Γενική Περίπτωση

Έστω ότι η συνεχής συνάρτηση $f |[α, β]$ δεν έχει σταθερό πρόσημο και x_1, x_2, x_3 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ όπως φαίνεται στο σχήμα:



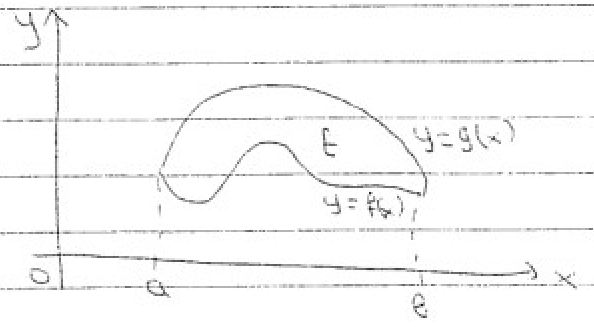
Τότε $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 =$

$$= \int_{\alpha}^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_3}^{\beta} f(x)dx.$$

ισοδύναμα $\boxed{E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx}$

4. Έστω 2 συνεχείς συναρτήσεις $f, g |[α, β]$ με $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [α, β]$

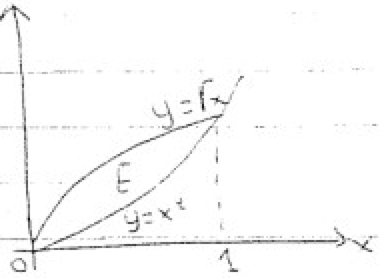
Τότε $\boxed{E = \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)]\, dx}$



Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν τα διαγράμματα των συναρτήσεων

$f(x)=x^2 \mid \mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt{x} \mid [0,+\infty)$

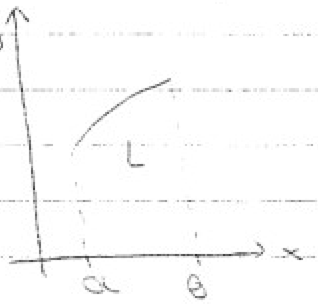


$$E=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Ασκησεις: 16, 17 λυμενες
29, 30, 32 άλυτες

Μηκος τόξου

Το μηκος τόξου L της καμπυλης $y=f(x) \mid [\alpha,\beta]$ ειναι



$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Αν η καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη
$y=f(t)$, $x=g(x)$, $t\in[\gamma,\delta]$
τοτε $L=\int_\gamma^\delta \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt$

Παραδειγματα

1. Να ευρεθει το μηκος τόξου της καμπυλης: $y=x^{3/2} \mid [0,10]$

Λυση

$$L=\int_0^{10}\sqrt{1+[(x^{3/2})']^2}\,dx=\int_0^{10}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx=$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{10} \sqrt{4+9x}\, dx = \frac{1}{18} \int_4^{94} z^{1/2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{18} \left[\frac{z^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_4^{94} = \dots$$

2. Να ευρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης:
$x = t^3 - 3t \quad , y = 3t^2 \quad , t \in [0,1]$

Λύση

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (3t^2-3)^2}\, dt =$$

$$= 3 \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}\, dt =$$

$$= 3 \int_0^1 \sqrt{(t^2+1)^2}\, dt = 3 \int_0^1 (t^2+1)\, dt =$$

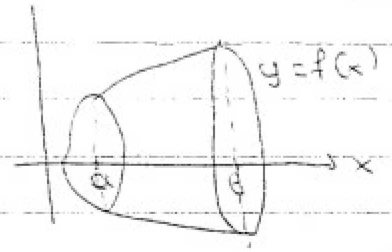
$$= 3 \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^1 = 4$$

ασκήσεις 22 λυμένη, 40 άλυτη

Όγκοι στερεών

Για μια συνεχή συνάρτηση $f[a,b]$ με $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ ο όγκος V του στερεού που προκύπτει δια περιστροφής περί τον άξονα $x'x$ του χωρίου που ορίζεται από το σύνολο:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b ,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ είναι

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\,dx$$

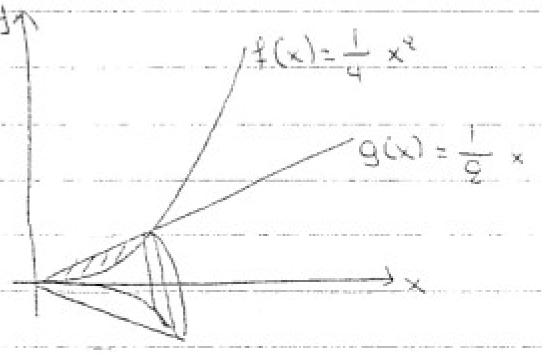


Παραδείγματα σελίδων 385, 386

Ασκήσεις: 24, 25 λυμένες, 42, 43, 45 άλυτες

Παράδειγμα: Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει με περιστροφή περί τον άξονα $x'x$ του χωρίου που ορίζεται από το σύνολο: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 4y \leq 2x\}$.

Λύση:



$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^2 g^2(x)\,dx - \pi \int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{4}x^2\,dx - \pi \int_0^2 \frac{1}{16}x^4\,dx =$$

$$= \pi \left(\left[\frac{x^3}{12} \right]_0^2 - \left[\frac{x^5}{80} \right]_0^2 \right) = \frac{4}{15}\pi$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+4}, \quad \int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{3x+1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x}\,dx$$

πρώτου είδους

$$\int_0^2 \frac{3x}{x-2}\,dx, \quad \int_{-1}^{0} \frac{x^2+7}{x+1} e^x\,dx, \quad \int_1^3 \frac{\sin x\, e^x}{(x-1)(x-3)}\,dx$$

δευτέρου είδους

$\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x^2} dx$ τρίτου είδους

Πρώτου είδους

i) Έστω η συνάρτηση $f/[a,+\infty)$ για την οποία υπάρχει το $I(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall\ x \geq a$

Αν $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} I(x) \in \mathbb{R}$ τότε θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f υπάρχει (η συγκλίνει) και είναι:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει (ή αποκλίνει)

Παραδείγματα

1) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$, $a>0$ p-ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_a^x t^{-p} dt = \begin{cases} \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^x, & \text{αν } p \neq 1 \\ [\ln t]_a^x, & \text{αν } p=1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1}, & \text{αν } p\neq 1 \\ \ln x - \ln a, & \text{αν } p=1 \end{cases}$$

- Αν $p>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = \frac{a^{-p+1}}{p-1} \in \mathbb{R}$
- Αν $p \leq 1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = +\infty$

Άρα το p-ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν $p>1$ και είναι: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{-p+1}}{p-1}$, για $p>1$

2. $\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ όπου $a,\lambda \in \mathbb{R}$ εκθετικό ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_a^x e^{-\lambda t}\, dt = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_a^x, & \text{αν } \lambda \neq 0 \\ x-a, & \text{αν } \lambda = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda x}}{\lambda}, & \text{αν } \lambda \neq 0 \\ x-a, & \text{αν } \lambda = 0 \end{cases}$$

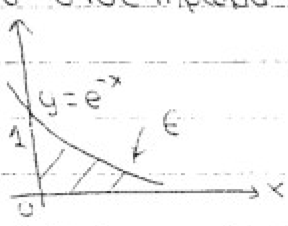
- Αν $\lambda > 0$ τότε $\lim_{x \to +\infty} I(x) = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda} \in \mathbb{R}$
- Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lim_{x \to +\infty} I(x) = +\infty$

Οπότε το εκθετικό ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν $\lambda > 0$ και είναι $\boxed{\int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}}$, $\lambda > 0$

Ειδικά για $a=0$ $\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}}$ $\lambda > 0$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα εκφράζει εμβαδόν μη φραγμένων χωρίων

Παράδειγμα:



$$E = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

ii) Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty, \beta]$ για την οποία υπάρχει το $I(x) = \int_x^{\beta} f(t)\, dt \quad \forall x \leq \beta$

Αν $\exists \lim_{x \to -\infty} I(x)$ τότε θα λέμε ότι το <u>γενικευμένο ολοκλήρωμα</u>

της f υπάρχει ή (συγκλίνει) και είναι:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^{\beta} f(t)dt$$

Αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει ή (αποκλίνει)

Παραδείγματα

1. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$

$$I(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = [arctgt]_x^0 = arctg0 - artgx = -arctgx$$

Άρα, $\lim_{x\to-\infty} I(x) = -(\lim_{x\to-\infty} artgx) = -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

Άρα, $\boxed{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}}$

ii) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$

Είναι $I(x) = \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = [arctgt]_x^0 =$

$= arctg0 - arctgx = -arctgx$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} I(x) = -\lim_{x\to-\infty} arctgx =$

$= -(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

Άρα $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

2 i) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2} dx$

$$I(x) = \int_x^0 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_x^0 =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln 1 - \ln(1+x^2)] = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Άρα, $\lim_{x\to-\infty} I(x) = -\infty$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει

iii) Αν για την συνάρτηση $f/\mathbb{R}$ υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ και $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

ΚΟΙΤΑ. → τότε ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Παραδείγματα

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2+7x-10}{8x^4-5x^3+10x^2+6}\,dx$

Θέτουμε $f(x) = \frac{3x^2+7x-10}{8x^4-5x^3+10x^2+6}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Τότε $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2+7x-10}{8x^4-5x^3+10x^2+6}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{8}$

και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ υπάρχει οπότε θα υπάρχει και το $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

(ii) $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+5x-6}{x^3+4x^2+11x-7}\,dx$

Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^3+4x^2+11x-7}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

τότε $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+5x-6}{x^3+4x^2+11x-7}}{\frac{1}{x}} = 1$

και $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ δεν υπάρχει οπότε δεν θα υπάρχει το $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x+1}\,dx$

Θέτουμε $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x+1}$ και $g(x) = e^{-2x}$

Τότε $l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-2x}}{x+1}}{e^{-2x}} = 0$

και το $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ υπάρχει

οπότε θα υπάρχει και το $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x+1}\,dx$

Ανάλογα κριτήρια για συναρτήσεις $f|(-\infty, \beta]$

S.O.S. Μπορώ να τη χρησιμοποιώ σε άλλες ασκήσεις (κριτήριο ολοκληρωσιμότητας για τη σύγκλιση των σειρών).

ασκ 49, 50 λύσεις

Δευτέρου Είδους

i) Έστω $f/[a,b]$ με $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

για την οποία υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$I(x) = \int_x^b f(t)\,dt, \ \forall\, x \in [a,b]$$

Αν $\exists \lim_{x \to a^+} I(x) \in \mathbb{R}$

τότε θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει και $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt}$

Αν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει.

Παραδείγματα

1. $\int_0^1 \ln x\,dx$

$$I(x) = \int_x^1 \ln t\,dt = \int_x^1 t' \ln t\,dt = [t \ln t]_x^1 - \int_x^1 t (\ln t)'\,dt =$$
$$= -x\ln x - 1 + x$$

Άρα $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{x \to 0^+} I(x) = -1$

(διότι $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ $\to$ (με κανόνα Hospital))

Αν $u^2=1 \Leftrightarrow y=x$ ή $y=-x$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι 2 αυτές συναρτήσεις είναι λύσεις της (1)
Υποθέτουμε ότι $u^2 \neq 1$ οπότε από την (2) προκύπτει:

$$\int \frac{u}{u^2-1}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2-1| = \ln|x| + \ln k$$

$$\ln\sqrt{|u^2-1|} = \ln(k|x|)$$

$$|u^2-1| = k^2|x|^2$$

$$u^2-1 = (\pm k^2)x^2$$

$$u^2 = 1+cx^2 \quad \text{όπου } c\in\mathbb{R}^*$$

$$y^2 = x^2+cx^4 \quad \text{όπου } c\in\mathbb{R}^*$$

$$y^2 = x^2+cx^4 \quad \text{όπου } c\in\mathbb{R}$$

(για $c=0$ δίνονται οι λύσεις $y=x$, $y=-x$)

Ασκήσεις: 23 λυμένη, 44, 45 άλυτη
Παραδείγματα σελίς 336

Εξισώσεις της μορφής

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}}$$

όπου $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

τότε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{matrix}\right\}$

έχει μοναδική λύση την $x=x_0, y=y_0$

Θέτουμε $\boxed{X=x-x_0}$, $\boxed{Y=y-y_0}$

και η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε ομογενή

Παράδειγμα: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$

Λύση

Έχουμε $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

οπότε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} x+y-3=0 \\ x-y-1=0 \end{matrix}\right\}$

έχει μοναδική λύση την $x=2$, $y=1$

Θέτουμε $\boxed{X=x-2}$, $\boxed{Y=y-1}$

οπότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{(X+2)+(Y+1)-3}{(X+2)-(Y+1)-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y}$$

ομογενής $Y=U\cdot X$ . . .

SKAG

2 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Θέτουμε $\boxed{z = a_1 x + b_1 y}$

και η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε χωριζομένων μεταβλητών.

Παράδειγμα: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{1-x-y}$

Λύση

Έχουμε $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Θέτουμε $\boxed{z = x+y}$ οπότε

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{1-z} \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-z}$$

χωριζομένων μεταβλητών . . .

Ασκήσεις: 23, 24 λυμένες, 47 άλυτη

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \varphi(x) y = \sigma(x)} \quad (1)$$

1η Μέθοδος

Ζητείται να ευρεθεί μια θετική συνάρτηση $I(x)$, η οποία καλείται ολοκληρωτικός παράγοντας, ώστε το πρώτο μέλος της εξισώσεως

$$I(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x) I(x) y = \sigma(x) \cdot I(x) \quad (2)$$

να είναι ίσο με την παράγωγο της $I(x)y$.

Τούτο συμβαίνει όταν:

$$\frac{dI}{dx} = \phi I \Leftrightarrow \int \frac{dI}{I} = \int \phi \, dx \Leftrightarrow I = e^{\int \phi \, dx}$$

Κατόπιν τούτου η (2) γίνεται

$$\frac{d(Iy)}{dx} = G(x) \cdot I(x) \Leftrightarrow Iy = \int G(x) I(x) dx$$

Παράδειγμα: $\frac{dy}{dx} + y = \cos x$

Λύση

Αναζητάμε συνάρτηση $I(x) > 0$ ώστε το πρώτο μέλος της εξίσωσης: $I \frac{dy}{dx} + yI = I \cos x$

να είναι ίσο με την παράγωγο του $I \cdot y$. Τούτο συμβαίνει όταν:

$$\frac{dI}{dx} = I \Leftrightarrow \int \frac{dI}{I} = \int dx \Rightarrow \ln I = x \Rightarrow \boxed{I = e^x}$$

Άρα προκύπτει:

$$(e^x y)' = e^x \cos x \Leftrightarrow$$

$$e^x y = \int e^x \cos x \, dx \Leftrightarrow$$

$$e^x y = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) e^x + c \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c e^{-x}$$

SKAG

2η Μέθοδος

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x) y = 0 \quad (3)$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά:

$$\frac{dy}{dx} = -\phi(x) \cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \phi(x)\, dx \quad (\text{για } y \neq 0)$$

$$\ln|y| = -\int \phi(x) dx + \ln \kappa \quad , \kappa > 0$$

$$\ln\left|\frac{y}{\kappa}\right| = -\int \phi(x)\, dx$$

$$\left|\frac{y}{\kappa}\right| = e^{-\int \phi(x)\, dx}$$

$$y = c\, e^{-\int \phi(x) dx} \quad (\text{όπου } c = \pm \kappa \in \mathbb{R}^*)$$

$$y = c\, e^{-\int \phi(x) dx} \quad , c \in \mathbb{R}$$

<u>Πρόταση</u>

Η γενική λύση της (1) δίνεται σαν άθροισμα της γενικής λύσης της αντιστοίχου ομογενούς (3) και μιας μερικής λύσης $\psi(x)$ της (1) δηλαδή,

$$y = c e^{-\int \phi(x) dx} + \psi(x)$$

Απόδειξη:

Εύρεση μιας μερικής λύσης $\psi(x)$

SKAG

Μέθοδος Lagrange

Η ψ θα είναι της μορφής:

$$\boxed{\psi = g(x)\, e^{-\int \phi(x)dx}}$$

Παράδειγμα: $\frac{dy}{dx} + y = \cos x$

Λύση: Εδώ $\phi(x) = 1$ οπότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$y = c\, e^{-\int \phi(x)dx} + \psi(x) =$$

$$= c\, e^{-\int 1\, dx} + \psi(x) =$$

$$= c\, e^{-x} + \psi(x)$$

Η $\psi(x)$ θα είναι της μορφής:

$$\psi(x) = g(x) \cdot e^{-x}$$

Επειδή η $\psi(x)$ πρέπει να ικανοποιεί την αρχική εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{d}{dx}\left[g(x) \cdot e^{-x}\right] + g(x) \cdot e^{-x} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} g(x) \cdot e^{-x} + g(x) \frac{d}{dx} e^{-x} + g(x) e^{-x} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} g(x)\, e^{-x} - g(x) e^{-x} + g(x) e^{-x} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = e^{x} \cos x$$

$g(x) = \int e^x \cos x \, dx$
$g(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^x$

Άρα $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

Ασκήσεις: 26, 27 λυμένες
48 άλυτη

Διαφορική εξίσωση Bernoulli

$\boxed{\frac{dy}{dx} + \Phi(x) y = G(x) \cdot y^a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$

- Αν $a=0 \Rightarrow$ γραμμική
- Αν $a=1 \Rightarrow$ χωριζόμενων μεταβλητών
- Αν $a \neq 0,1$ χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $\boxed{u = y^{1-a}}$ οπότε η εξίσωση ανάγεται σε γραμμική

Παράδειγμα: $\frac{dy}{dx} + xy = 6x\sqrt{y}$

Λύση. Εδώ $a = \frac{1}{2}$ οποτε $u = y^{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{u = y^{1/2}}$

Άρα $y = u^2$ και $\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}$ και η εξίσωση γίνεται:

$2u\frac{du}{dx} + xu^2 = 6xu \underset{\text{για } u \neq 0}{\Rightarrow}$

$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}xu = 3x$ γραμμική ...

Ασκήσεις 28 λυμένη 49 άλυτη

SKAG

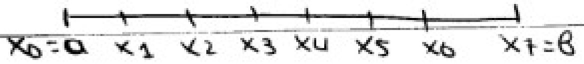
Ορισμένο ολοκλήρωμα

• Διαμέριση του $[\alpha,\beta]$

$\delta = (x_i)\ i=0,1,\dots,n$

όπου $x_0=\alpha<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=\beta$

Παράδειγμα



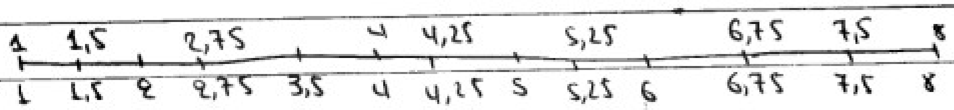
• $\Delta([\alpha,\beta])$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[\alpha,\beta]$

• λεπτότης διαμερίσεως δ

$\lambda(\delta)=\max\{x_i-x_{i-1} : i=1,2,\dots,n\}$.

• Αν $\delta,\delta' \in \Delta([\alpha,\beta])$ τότε λέμε δ είναι λεπτότερη της δ' αν $\delta' \subseteq \delta$

Παράδειγμα



$\delta' = 1<1{,}5<2{,}75<4<4{,}25<5{,}25<6{,}75<7{,}5<8$

$\delta = 1<1{,}5<2<2{,}75<3{,}5<4<4{,}25<5<5{,}25<6<6{,}75<7{,}5<8$

Είναι $\lambda(\delta)=0{,}75<1{,}5=\lambda(\delta')$

Γενικά

Αν <u>δ λεπτότερη</u> της $\delta' \Rightarrow \lambda(\delta)\le\lambda(\delta')$