ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

[Δεν είναι σκόπιμο να αποκαλύψεις στο παιδί σου ότι οι μεγάλοι άντρες δεν είχαν ιδέα από άλγεβρα]

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ: ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ Μ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Πείραμα Τύχης

Πείραμα τύχης λέγεται κάθε πείραμα που είναι δυνατό να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.

Δειγματικός Χώρος

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης και συμβολίζεται με Ω.

- Αν $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος Ω είναι:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_\nu\}$$

Ενδεχόμενο

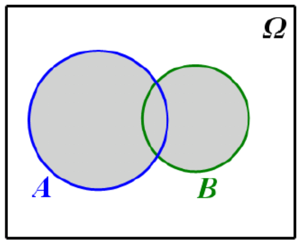
Αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε ονομάζουμε ενδεχόμενο του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω.

Παράδειγμα: Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δύο φορές, παρατηρώντας μετά από κάθε ρίψη την όψη που εμφανίζεται στο νόμισμα, εκτελούμε ένα πείραμα τύχης. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού είναι: Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. Έστω λοιπόν ότι μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα ‘οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες’, τότε το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του συνόλου Α={ΚΚ, ΓΓ}. Το υποσύνολο Α του Ω το λέμε στην περίπτωση αυτή ενδεχόμενο του πειράματος.

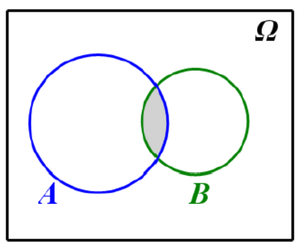
<u>**Πράξεις με Ενδεχόμενα**</u>

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω τότε ορίζουμε:

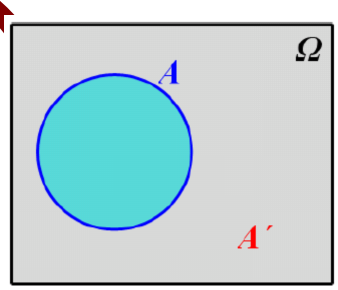
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ που διαβάζεται ‘<u>Α ένωση Β</u>’ και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β.



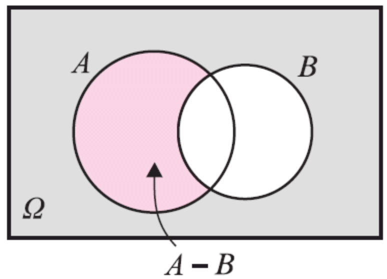
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ που διαβάζεται ‘<u>Α τομή Β</u>’ και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.



- Το ενδεχόμενο A' που διαβάζεται ‘<u>αντίθετο του Α</u>’ ή ‘<u>συμπληρωματικό του Α</u>’ και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.



- Το ενδεχόμενο $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ που διαβάζεται ‘<u>διαφορά του Β από το Α</u>’ και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α και όχι το Β.



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι:

- $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A}$
- $(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{B}$
- $(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \varnothing$
- $\mathrm{A}-\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}'$

<u>Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα</u>

Δύο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται ασυμβίβαστα (ή ξένα μεταξύ τους) όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν ισχύει ότι:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις του:

Γράμματα (Γ), Κεφαλή (Κ)

1) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος,

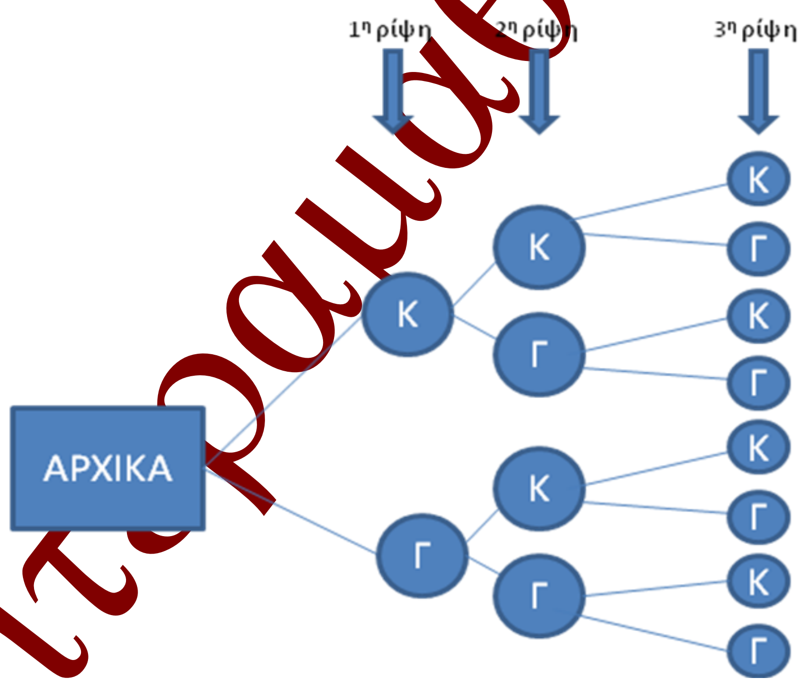
2) Να γράψετε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: Να φέρουμε ακριβώς δύο φορές κεφαλή,

Β: Να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά γράμματα

<u>Λύση:</u>

1) Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα φαίνεται ο δειγματικός χώρος του πειράματος.



Άρα είναι: Ω={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

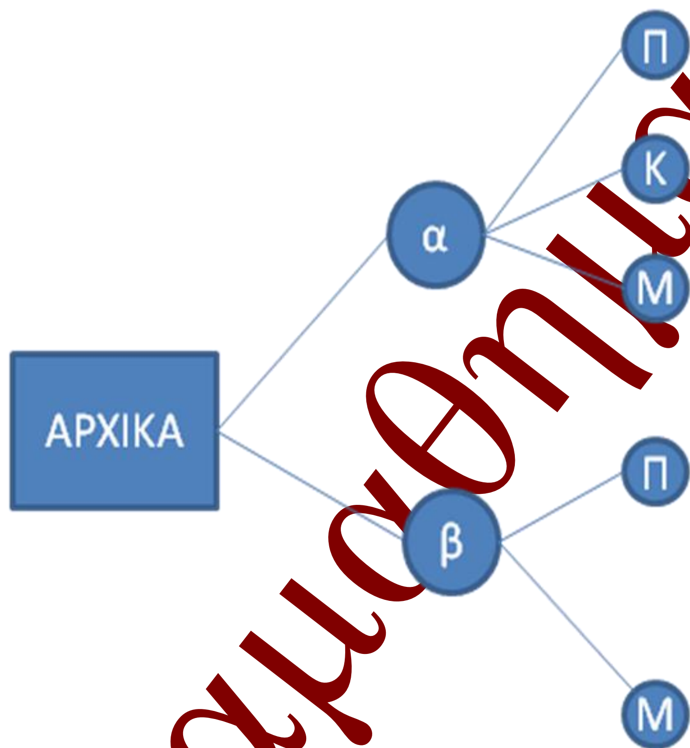
2) Α={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

Β={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

2. Έστω ότι έχουμε δύο κουτιά α και β, το α περιέχει πράσινες (Π) σφαίρες, κίτρινες (Κ) και μαύρες (Μ) σφαίρες. Το β περιέχει πράσινες και μαύρες σφαίρες. Διαλέγουμε τυχαία μια σφαίρα. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση:

Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα φαίνεται ο δειγματικός χώρος του πειράματος.



Άρα είναι: Ω={αΠ, αΚ, αΜ, βΠ, βΜ}

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός της Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος που έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu)=1$

Ο αριθμός $P(\omega_i)$ ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Προσοχή: Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζεται ο αριθμός:

$$P(\varnothing)=0$$

→ Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι είναι: $P(\Omega)=1$

Κλασικός Ορισμός της Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$,..., $\{\omega_\nu\}$ είναι ισοπίθανα, δηλαδή ισχύει ότι: $P(\omega_i)=P$ για κάθε $i\in\{1, 2,\ldots, \nu\}$ τότε έχουμε ότι:

$$P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu)=1 \Leftrightarrow \nu P=1 \Leftrightarrow P=\frac{1}{\nu}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα το ενδεχόμενο $A=\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_\mu\}$ του παραπάνω δειγματικού

Ω, τότε έχουμε:

$$P(A)= P(\alpha_1)+ P(\alpha_2)+...+ P(\alpha_\mu) \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+...+\frac{1}{\nu} \Leftrightarrow P(A)=\frac{\mu}{\nu}$$

Επομένως: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

όπου $N(A)$: το πλήθος στοιχείων του Α, $N(\Omega)$: το πλήθος στοιχείων του Ω.

<u>Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων</u>

Οι βασικές ιδιότητες του λογισμού των πιθανοτήτων είναι οι παρακάτω:

- Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Για δύο αντίθετα ενδεχόμενα Α, Α΄ ισχύει ότι: $P(A') = 1 - P(A)$

- <u>Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων</u>

  Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$

- Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_2\}$ και $B=\{\omega_2,\omega_3\}$.

Αν $p(A)=\frac{3}{5}$ και $p(B)=\frac{1}{2}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες: $p(\omega_1)$, $p(\omega_2)$ και $p(\omega_3)$.

(Απ. $p(\omega_1)=\frac{1}{2}$, $p(\omega_2)=\frac{1}{10}$, $p(\omega_3)=\frac{2}{5}$)

2. Υποθέτουμε ότι Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν ότι:

$$p(A)=0.5,\ p(B)=0.4 \text{ και } p(A\cup B)=0.8$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

I. να μην πραγματοποιηθεί το Α.

II. να πραγματοποιηθεί μόνο το Β.

III. να πραγματοποιηθούν και το Α και το Β.

IV. να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.

(Απ. I. $p(A')=0.5$, II. $p(B-A)=0.3$, III. $p(A\cap B)=0.1$, IV. $p(A\cup B)'=0.2$)

3. Έστω ότι A, B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν τα παρακάτω:

$$p(A \cup B) = \frac{4}{5},\ p(B') = \frac{1}{3} \text{ και } p(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες: $p(A)$, $p(B)$, $p(A' \cap B)$

(Απ. $p(A) = \frac{8}{15}$, $p(B) = \frac{2}{3}$, $p(A' \cap B) = \frac{4}{15}$)

4. Έστω A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$p(A) = \frac{3}{4} \text{ και } p(B) = \frac{1}{3}$$

I. Να εξετάσετε αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα

II. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $p(A \cup B) \geq \frac{3}{4}$

(Απ. I. Όχι)

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$p(A) = x,\ p(B') = \frac{x}{x+1},\ p(A \cap B) = \frac{x}{x+1} \text{ με } x \in (0,1)$$

I. Για $x = \frac{1}{2}$ να εξετάσετε αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

II. Να βρείτε την πιθανότητα $p(A \cup B)$

III. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $p(A \cup B)$

(Απ. I. Όχι, II. $p(A \cup B) = \frac{x^2+1}{x+1}, x \in (0,1)$, III. $2\sqrt{2} - 2$)

6. Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός A είναι 0.4 ενώ η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός B είναι 0.5. Η πιθανότητα να συμβαίνουν μαζί τα A, B είναι 0.2. Ζητούνται τα παρακάτω:

I. Η πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα A, B.

II. Η πιθανότητα να μην συμβεί το A.

III. Η πιθανότητα να συμβεί το A και να μην συμβεί το B.

IV. Η πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο από τα A, B.

V. Η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα A, B.

(Απ. I. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0.7$, II. $p(\mathrm{A}') = 0.6$, III. $p(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = 0.2$,

IV. $p((\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})) = 0.5$, V. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = 0.3$)

7. Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας φοιτητής για την ομάδα μπάσκετ του πανεπιστημίου του είναι $\frac{1}{5}$ ενώ για την ομάδα χάντμπολ είναι $\frac{1}{6}$. Αν η πιθανότητα να εκλεγεί και στις δύο ομάδες είναι $\frac{1}{10}$ τότε να υπολογίσετε:

I. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια από τις δύο ομάδες.

II. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί μόνο στην ομάδα χάντμπολ.

III. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί μόνο σε μια από τις δύο ομάδες.

(Απ. I. $\frac{4}{15}$, II. $\frac{1}{15}$, III. $\frac{1}{6}$)

8. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δύο γεγονότα Α, Β είναι ίση με 0.125. Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί ούτε το Α ούτε το Β είναι ίση με 0.375. Αν τα γεγονότα Α, Β είναι ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα Α, Β.

Υπόδειξη: Δύο ενδεχόμενα Α, Β ονομάζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, όταν και μόνο όταν ισχύει: $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})$

(Απ. $p(\mathrm{A})=0.25, p(\mathrm{B})=0.5$ ή $p(\mathrm{A})=0.5, p(\mathrm{B})=0.25$)

9. Έστω ότι από μια τράπουλα (αποτελείται από 52 φύλλα) τραβάμε τυχαία ένα φύλλο.

Υποθέτουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: Το φύλλο είναι ΄κούπα΄

Β: Το φύλλο είναι ΄Ρήγας΄

Γ: Το φύλλο είναι κόκκινου χρώματος

Ι. Να βρείτε την πιθανότητα των παραπάνω ενδεχομένων Α,Β,Γ.

ΙΙ. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Α΄,Β΄,Γ΄.

ΙΙΙ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$.

(Απ. Ι. $p(\mathrm{A})=0.25$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{13}$, $p(\Gamma)=\frac{1}{2}$, ΙΙ. $p(\mathrm{A}')=0.75$, $p(\mathrm{B}')=\frac{12}{13}$, $p(\Gamma')=\frac{1}{2}$,

ΙΙΙ. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{52}$)

10. Έστω ότι ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια. Να βρεθούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: Εμφανίζεται ακριβώς ένα τριάρι

Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι 8

Γ: Το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστον 4, ενώ το άλλο φέρνει άρτιο.

(Απ. $p(\mathrm{A})=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, $p(\mathrm{B})=\frac{5}{36}$, $p(\Gamma)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$)

11. Τρία δοχεία Α,Β,Γ περιέχουν σφαιρίδια άσπρου και μαύρου χρώματος ως εξής:

Α: 2 άσπρα και 3 μαύρα

Β: 4 άσπρα και 2 μαύρα

Γ: 3 άσπρα και 5 μαύρα

Βγάζουμε ένα σφαιρίδιο από κάθε κουτί. Να βρείτε την πιθανότητα:

Ι. Να πάρουμε τρία άσπρα σφαιρίδια.

ΙΙ. Να πάρουμε τουλάχιστον ένα μαύρο σφαιρίδιο.

(Απ. Ι. $\frac{1}{10}$, ΙΙ. $\frac{9}{10}$)

12. Έστω ότι ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα και στις δύο ρίψεις να εμφανιστεί η ίδια ένδειξη (Κ ή Γ);

(Απ. $\frac{1}{2}$)

13. Έστω δύο μαθητές Α και Β οι οποίοι λύνουν ένα πρόβλημα φυσικής. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 0.75 και η πιθανότητα να το λύσουν και οι δύο είναι 0.25. Αν η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Α είναι ίση με $\frac{2}{3}$, τότε να βρείτε την πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Α ή μόνο ο Β.

(Απ. $\frac{1}{2}$)

14. Το τμήμα Γ_1 του $1^{ου}$ Γενικού Λυκείου Γλυφάδας αποτελείται από 40 αγόρια και 27 κορίτσια. Στο επίσημο διαγώνισμα χημείας του τετραμήνου έγραψαν άριστα τα $\frac{3}{5}$ των αγοριών και τα $\frac{4}{9}$ των κοριτσιών. Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι κορίτσι ή να έγραψε άριστα στο διαγώνισμα.

(Απ. $\frac{51}{67}$)

15. Έστω μία τάξη που αποτελείται από 30 μαθητές. Για τις ανάγκες μιας έρευνας της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας, οι μαθητές ρωτήθηκαν πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός μαθητών	3	11	8	4	3	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει δύο παιδιά.

(Απ. $\frac{11}{30}$)

16. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α,Β είναι υποσύνολα του Ω. Αν $p(\mathrm{A}') \leq 0.28$ και $p(\mathrm{B}') \leq 0.71$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \geq 1.01 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

17. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 0.3, η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος είναι 0.2 και η πιθανότητα να κερδίσει ο Δημήτρης είναι 0.4. Να βρείτε την πιθανότητα:

Ι. Να κερδίσει ο Νίκος ή ο Γιώργος.

ΙΙ. Να μην κερδίσει ο Νίκος ή ο Δημήτρης.

(Ι. 0.5, ΙΙ. 0.3)

18. Σε μια τάξη ενός δημοτικού σχολείου το 15% των μαθητών φοράνε γυαλιά μυωπίας, το 40% φοράνε σιδεράκια και το 10% φοράνε και γυαλιά και σιδεράκια. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μην φοράει ούτε γυαλιά ούτε σιδεράκια.

(Απ. 55%)

19. Έστω ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B}')} = \frac{1}{4}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες $p(\mathrm{B})$ και $p(\mathrm{B}')$.

(Απ. $p(\mathrm{B}) = 0.2$, $p(\mathrm{B}') = 0.8$)

20. Αν είναι γνωστό ότι:

$$0 < p(\mathrm{A}) < 1,$$

τότε να αποδείξετε ότι θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{p(\mathrm{A})} + \frac{1}{p(\mathrm{A}')} \geq 4.$$

21. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια η πιθανότητα ο μαθητής:

Α. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Β. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Γ. να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2000

(Απ. Α. $\frac{4}{15}$, Β. $\frac{1}{6}$, Γ. $\frac{11}{15}$)

22. Σε μια τεχνική εταιρεία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι ως μηχανικοί ή τεχνικό προσωπικό. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα είναι μηχανικοί, ενώ 10 γυναίκες ανήκουν στο τεχνικό προσωπικό. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρεία. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: το άτομο είναι άνδρας που ανήκει στο τεχνικό προσωπικό

Β: το άτομο είναι άνδρας ή είναι μηχανικός

(Απ. $p(\mathrm{A}) = 0.5$, $p(\mathrm{B}) = 0.9$)

23. Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μια σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5. Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

Α. $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$

Β. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

Γ. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}')$

Δ. $p((\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}'))$

Επαναληπτικές Εξετάσεις 2003

(Απ. Α. $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B}) = \frac{1}{5}$, Β. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{3}{5}$, Γ. $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}') = \frac{27}{30}$,

Δ. $p((\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}')) = \frac{1}{2}$)

24. Ένα κουτί περιέχει 40 κόκκινες κάρτες και άγνωστο πλήθος από κίτρινες και πράσινες κάρτες.

Αν η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία μια κίτρινη κάρτα είναι 0.25 και μια πράσινη κάρτα 0.35 τότε να βρείτε:

Α. το πλήθος όλων των καρτών που περιέχει το κουτί

Β. τον αριθμό των κίτρινων και πράσινων καρτών που υπάρχουν στο κουτί.

(Απ. Α. 100 , Β. 25 κίτρινες, 35 πράσινες)

25. Σε ένα συνέδριο ιατρικής συμμετέχουν Γερμανοί, Γάλλοι και Άγγλοι ιατροί. Από τους σύνεδρους επιλέγεται τυχαία ένας για τη θέση του γραμματέα του συνεδρίου. Αν στο συνέδριο συμμετέχουν 25 Γερμανοί, ενώ οι πιθανότητες να επιλεγεί Γάλλος είναι 1/3 και Άγγλος είναι 0.25, τότε να βρεθεί το πλήθος των συνέδρων.

(Απ. 60 σύνεδροι)

26. Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία ένα καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

Α. γυναίκα ή φιλόλογος

Β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

Γ. άνδρας και φιλόλογος

Δ. άνδρας ή φιλόλογος.

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2003

(Απ. Α. 65%, Β. 25%, Γ. 10%, Δ. 75%)

27. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, τότε να αποδείξετε ότι:

Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε $p(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A})$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο αρχικά υπολογίστε την πιθανότητα $p[(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \cup \mathrm{A}]$ λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει: $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

28. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\alpha x^2 + 4x + \gamma = 0$$

Αν α, γ είναι το αποτέλεσμα της ρίψης δύο ζαριών, τότε να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α. Η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

Β. Η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα

Γ. Η εξίσωση να έχει δύο μιγαδικές ρίζες

Δ. Η εξίσωση να έχει μια πραγματική και μια μιγαδική ρίζα

(Απ. Α. $\frac{5}{36}$, Β. $\frac{1}{12}$, Γ. $\frac{7}{9}$, Δ. 0)

29. Έστω Ω={x, y, ω, z} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος.

Α. Να βρείτε το p(y), αν είναι γνωστό ότι: p(x)=$\frac{1}{2}$, p(ω)=$\frac{1}{4}$, p(z)=$\frac{1}{15}$

Β. Να βρείτε τα p(x) και p(y), αν είναι γνωστό ότι: p(ω)= p(z)=$\frac{1}{6}$ και

p(x)= 3p(y).

(Απ. Α. $\frac{11}{60}$, Β. p(x)=$\frac{1}{2}$, p(y)=$\frac{1}{6}$)

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

Πράξεις και Ιδιότητες των Πραγματικών Αριθμών

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

$$(\alpha=\beta \ \ \text{και} \ \ \gamma=\delta)\Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$$

$$(\alpha=\beta \ \ \text{και} \ \ \gamma=\delta)\Rightarrow \alpha\gamma=\beta\delta$$

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Αν $\gamma\neq 0$, τότε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$$

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \ \text{ή} \ \beta=0$$

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός ορίζουμε ότι:

$$\alpha^{\nu}=\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha \quad \text{για } \nu>1$$

και

$$\alpha^{1}=\alpha$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha\neq 0$ τότε έχουμε ότι:

$$\alpha^{0}=1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

→ Αν $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$ (Προσοχή: Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Ιδιότητες Δυνάμεων

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογίσετε τα γινόμενα που ακολουθούν:

Α. $(-4)^{60} \cdot (-1.25)^{40}$

Β. $12^{100} \cdot 6^{-149} \cdot 1.5^{50}$

Γ. $(-0.25)^{17} \cdot 8^{11}$

(Απ. Α. 10^{40}, Β. 6, Γ. $-\frac{1}{2}$)

2. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

Α. $\dfrac{8x^5y^{-4}}{2x^{-4}y}$

Β. $\dfrac{3x^2y^{-1}-4x^{-3}y}{x^{-2}y}$

Γ. $\dfrac{8x^2y^{-1}+4x^{-3}y+12x^{-4}y^{-6}}{4x^{-5}y^3}$

(Απ. Α. $\dfrac{4x^9}{y^5}$, Β. $\dfrac{3x^4}{y^2}-\dfrac{4}{x}$, Γ. $\dfrac{2x^7}{y^4}+\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{3x}{y^9}$)

3. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

Α. $101^2 - 99^2$

Β. $\dfrac{5.25^2 - 3.25^2}{8.5}$

Γ. $10001^2 - 9999^2$

Δ. $\dfrac{123.708}{67.354^2 - 56.354^2}$

(Απ. Α. 400, Β. 2, Γ. $4 \cdot 10^4$, Δ. $\dfrac{1}{11}$)

4. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $3(\alpha+\beta)^2 - 3(\alpha-\beta)^2 = 12\alpha\beta$

Β. $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2)$

Γ. $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) - 2\alpha^2 = 2\alpha\beta$

Δ. $5\alpha^2 - 5(\alpha+1)(\alpha-1) = 5$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\dfrac{5(x^2-4)}{3(x-2)}$

Β. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Γ. $\dfrac{8(x^2-9)}{3(x-3)-4x+12}$

Δ. $\dfrac{(x+1)^2-4x}{2(x-1)}$

Ε. $\dfrac{4x^2-5x+1}{x-1}$

ΣΤ. $\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{121}(x-2)}$

(Απ. Α. $\dfrac{5}{3}(x+2)$, Β. $\dfrac{x-2}{x+2}$, Γ. $-8(x+3)$, Δ. $\dfrac{x-1}{2}$, Ε. $4x-1$, ΣΤ. $\dfrac{2x+3}{11}$)

6. Αν υποθέσουμε ότι ο ν είναι φυσικός αριθμός τότε να δείξετε ότι ο αριθμός:

$$2^{\nu}+2^{\nu+2}+2^{\nu+3}$$

είναι πολλαπλάσιο του 13.

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2-1}\cdot\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^3-1}$

Β. $\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha}{\alpha^3-1}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+\alpha}$

Γ. $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2-1}\cdot\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$

Δ. $\dfrac{\alpha^4}{5(\alpha+1)^3}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha-1}$

Ε. $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{\alpha^4+\alpha^2}{\alpha^2+1}\cdot\dfrac{3\alpha^2+3\alpha}{\alpha^2-1}$

(Απ. Α. $\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$, Β. 1, Γ. α, Δ. $\dfrac{\alpha^2}{5}$, Ε. 3α)

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\dfrac{x^{-2}}{y^{2}}\cdot\dfrac{y^{3}}{x^{3}}\cdot\dfrac{y^{5}}{x^{-3}}$

Β. $(x-y)^{2}\cdot(x^{-1}-y^{-1})^{-2}$

Γ. $\dfrac{(x-1)^{2}}{xy^{-2}}\cdot\dfrac{y^{-1}}{x^{2}-1}\cdot\dfrac{x+1}{y}$

Δ. $\dfrac{y^{-5}}{\omega y^{2}x^{6}}\cdot\dfrac{\omega^{-2}}{y^{-4}}\cdot\dfrac{x^{-3}}{\omega^{-3}}$

(Απ. Α. $\dfrac{y^{6}}{x^{2}}$, Β. $x^{2}y^{2}$, Γ. $1-\dfrac{1}{x}$, Δ. $\dfrac{1}{x^{9}y^{3}}$)

9. Να αποδείξετε την σχέση που ακολουθεί:

$$\left(\alpha-\frac{\beta^{2}}{\beta-\alpha}\right):\left(\frac{\alpha^{3}+\beta^{3}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}\right)=1$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιήστε την ταυτότητα:

$\alpha^{3}+\beta^{3}=(\alpha+\beta)(\alpha^{2}-\alpha\beta+\beta^{2})$

ΘΕΩΡΙΑ

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β και γράφουμε **α > β,** όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε αντίστοιχα ότι ο αριθμός β είναι μικρότερος από τον αριθμό α και γράφουμε **β < α**.

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του μηδενός.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος του μηδενός.

Προσοχή: Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι α > β ή α=β τότε έχουμε ότι:

α ≥ β

(α μεγαλύτερος ή ίσος του β)

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

$$(\alpha>0 \;\text{ και }\; \beta>0) \Rightarrow \alpha+\beta>0$$
$$(\alpha<0 \;\text{ και }\; \beta<0) \Rightarrow \alpha+\beta<0$$

$$\alpha,\ \beta \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}>0$$
$$\alpha,\ \beta \text{ ετερόσημοι } \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0$$

$$\alpha^2\geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha\in\mathbb{R}$$
$$(\text{Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } \alpha=0)$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων:

$$(\alpha > \beta \;\text{ και }\; \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

- $(\alpha > \beta \;\text{ και }\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς *α, β, γ, δ* ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \;\text{ και }\; \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Για θετικούς αριθμούς *α, β* και θετικό ακέραιο *ν* ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \beta^{\nu}$$

Διαστήματα:

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους ισχύει ότι: $\boldsymbol{\alpha \le x \le \beta}$

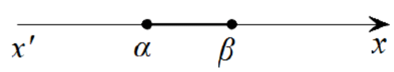
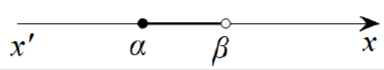
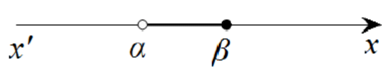
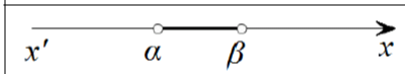
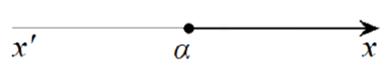
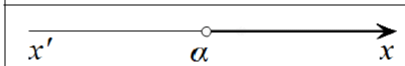
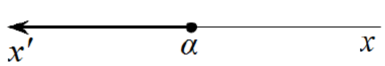
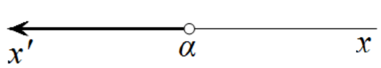
ονομάζεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με: **[α, β]**

→ Αν από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β τότε προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β που συμβολίζεται με: **(α, β)**

Άλλες μορφές διαστημάτων

- ❖ Ανοικτό δεξιά διάστημα: **[α, β)** → $\boldsymbol{\alpha \le x < \beta}$
- ❖ Ανοικτό αριστερό διάστημα: **(α, β]** → $\boldsymbol{\alpha < x \le \beta}$
- ❖ $[\alpha, +\infty) \rightarrow \boldsymbol{\alpha \le x}$ ($+\infty$: Συν άπειρο)
- ❖ $(-\infty, \alpha] \rightarrow \boldsymbol{x \le \alpha}$ ($-\infty$: Πλην άπειρο)

Μορφές Διαστημάτων Πραγματικών Αριθμών

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	*ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ*	*ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ*
	$\alpha \le x \le \beta$	$[\alpha,\ \beta]$
	$\alpha \le x < \beta$	$[\alpha,\ \beta)$
	$\alpha < x \le \beta$	$(\alpha,\ \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	$(\alpha,\ \beta)$
	$x \ge \alpha$	$[\alpha,\ +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha,\ +\infty)$
	$x \le \alpha$	$(-\infty,\ \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty,\ \alpha)$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

Α. $\alpha^2 + 16 \geq 8\alpha$

Β. $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \geq 0$

Γ. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha - 1$

Δ. $2\alpha^2 + 2\beta^2 - (\alpha+\beta)^2 \geq 0$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y αν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$$

(Απ. $x = 2, y = -3$)

3. Αν γνωρίζετε ότι είναι:

$$x < 1 < y$$

τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$1 + xy < x + y$$

ΘΕΩΡΙΑ

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \;\; \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \;\; \alpha < 0 \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \;\; \acute{\eta} \;\; x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \;\; \acute{\eta} \;\; x = -\alpha$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

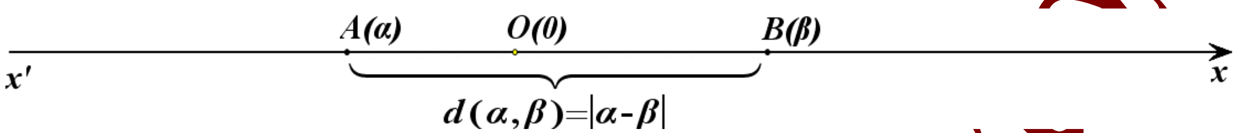
1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόσταση δύο αριθμών

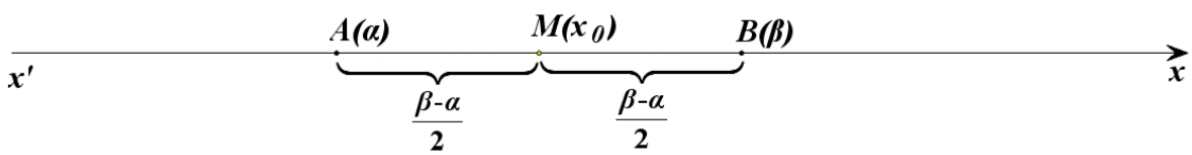
Έστω δύο αριθμοί α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα x΄x με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$$

Έστω ένα διάστημα [α, β] και Α και Β τα σημεία πάνω στον άξονα x΄x τα οποία παριστάνουν τα άκρα α και β αντίστοιχα.



Αν $M(x_o)$ το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$x_o=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

→ Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ονομάζεται κέντρο του διαστήματος ΑΒ.

→ Ο αριθμός $\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}$ ονομάζεται ακτίνα του διαστήματος ΑΒ.

Από τον ορισμό της απόστασης προκύπτουν τα παρακάτω:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \rho &\Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho,\ x_0 + \rho) \\ &\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \end{aligned}$$

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\begin{aligned} |x - x_0| > \rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty,\ x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho,\ +\infty) \\ &\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \ \text{ ή } \ x > x_0 + \rho \end{aligned}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο x, αν

Α. $|x|=3$

Β. $|x-4|=6$

Γ. $|x+5|=3$

(Απ. Α. $x=\pm3$, Β. $x=10$ ή $x=-2$, Γ. $x=-2$ ή $x=-8$)

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

Α. $|\pi-5|$

Β. $|\pi-4|+|\pi-3|+|5-\pi|$

Γ. $|2^3-2^4|-|2^4-2^3|$

(Απ. Α. $5-\pi$, Β. $6-\pi$, Γ. 0)

3. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$2<x<3$$

τότε να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $|x-2|+|x-3|$

Β. $|3-x|-|x-2|+2|x-3|$

Γ. $2|2-x|-|x-3|+|9-3x|$

(Απ. Α. 1, Β. $11-4x$, Γ. 2)

4. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη την παράσταση:

$$|x-5|-|7-x|$$

όταν είναι γνωστό ότι: Α. $x<5$, Β. $x>7$.

(Απ. Α. -2, Β. 2)

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις που ακολουθούν:

$A=2-|x+2|$

$B=3+|x-3|$

(Απ. Αν $x>-2$ τότε: $A=-x$, αν $x<-2$ τότε: $A=x+4$, αν $x=-2$ τότε: $A=2$, αντίστοιχα έχουμε ότι: Αν $x>3$ τότε: $B=x$, αν $x<3$ τότε: $B=6-x$, αν $x=3$ τότε: $B=3$)

6. Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$(\frac{x}{|x|}-1)(|x|+x)=0$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο να κάνετε πράξεις και να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα: $|x|^2=x^2$.

7. Αν $\alpha>\beta$, τότε να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Α. $\dfrac{|\beta-\alpha|+2(\alpha+2\beta)}{3}=\alpha+\beta$

Β. $\dfrac{|\beta-\alpha|-|\alpha-\beta|}{2}=0$

Γ. $\dfrac{|\alpha-\beta|-\alpha}{|\beta-\alpha|+\beta}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Δ. $\dfrac{3|\beta-\alpha|+2|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|}=5$

Ε. $\dfrac{|\alpha-\beta|+|\beta-\alpha|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\alpha|}=1$

8. Έστω ότι ισχύει: $\alpha > \beta > 0$.

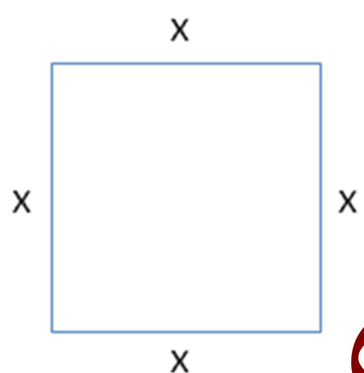
Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$1,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha}$$

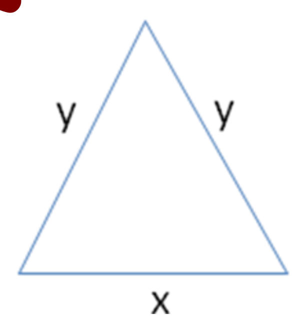
(Απ. $\frac{\beta}{\alpha} < 1 < \frac{\alpha}{\beta}$)

9. Αν είναι γνωστό ότι: $|x-3| < 0.3$ και $|y-5| < 0.4$, τότε να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.

Α.



Β.



(Απ. Α. $10.8 < 4x < 13.2$, Β. $11.9 < x + 2y < 14.1$)

ΘΕΩΡΙΑ

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

- ✓ **Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$.**

Ιδιότητες ριζών

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Ορισμός

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός που, όταν υψωθεί στην ν , δίνει τον α.

- ✓ **Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.**

Ιδιότητες ριζών

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|.$$

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Αν $\boldsymbol{a > 0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

Α. $\sqrt{64}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{225}$

Β. $\sqrt{81}$, $\sqrt{10000}$, $\sqrt{144}$

Γ. $\sqrt{25}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{100}$

(Απ. Α. 8, 13, 15, Β. 9, 100, 12, Γ. 5, 11, 10)

2. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις που ακολουθούν σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στου παρονομαστές:

Α. $\frac{24}{\sqrt{3}}$

Β. $\frac{16}{\sqrt{3}-1}$

Γ. $\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

(Απ. Α. $8\sqrt{3}$, Β. $8(\sqrt{3}+1)$, Γ. $6(\sqrt{7}-\sqrt{5})$)

3. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

Α. $\sqrt{0.0001}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[4]{0.0001}$

Β. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{0.001}$, $\sqrt[3]{64}$

Γ. $\sqrt[6]{1000000}$, $\sqrt{0.01}$, $\sqrt{625}$

(Απ. Α. 0.01, 2, 0.1, Β. 2, 0.1, 4, Γ. 10, 0.1, 25)

4. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

Α. $\sqrt{(x-1)^2}$

Β. $\sqrt{\frac{x^2}{16}}$

Γ. $\sqrt{(\pi-5)^2}$

Δ. $\sqrt{(-16)^2}$

(Απ. Α. $|x-1|$, Β. $\frac{|x|}{4}$, Γ. $5-\pi$, Δ. 16)

5. Να αποδείξετε ότι:

Α. $(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})=-3$

Β. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{7})^2}=2$

6. Να αποδείξετε ότι:

Α. $(\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{108}+\sqrt{5})=103$

Β. $(\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{20})\cdot(9\sqrt{2}+2\sqrt{5})=142$

7. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5$

Β. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=1$

Γ. $\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}=2-5\sqrt{5}$

8. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει:

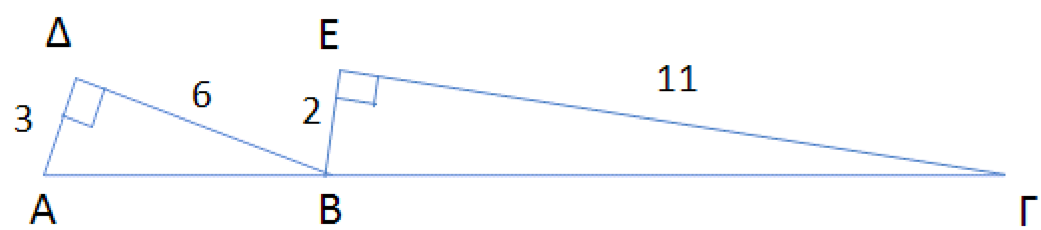
$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

τότε να υπολογίσετε την ποσότητα:

$$\mathrm{A} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

(Απ. $\mathrm{A} = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$)

9. Να εκφράσετε με τη βοήθεια ενός ριζικού το (ΑΓ) στο παρακάτω σχήμα:



(Απ. (ΑΓ)=$8\sqrt{5}$)

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}$

Β. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

(Απ. Α. $3\sqrt{2}$, Β. 2)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$

Έχουμε ότι:

$\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε:

$$\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Άρα, αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$, έχει ακριβώς μια λύση την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$ γίνεται $0x=-\beta$, η οποία:
  - αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και για αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη.
  - αν είναι $\beta=0$ έχει τη μορφή $0x=0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό x δηλαδή είναι ταυτότητα.

✓ Η λύση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $5x-3(x-1)=7-2x$

Β. $6x-3(2x-3)=2x-2(x-5)$

Γ. $5x+3(x-2)=8x-6$

(Απ. Α. $x=1$, Β. αδύνατη, Γ. ταυτότητα)

2. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$3x+\frac{5x+4}{5}=x+\frac{5}{2}$$

(Απ. $x=\frac{17}{30}$)

3. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$(x-4)^2=3x+(x-5)^2$$

(Απ. $x=-9$)

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\frac{4-x}{3}=\frac{2x+3}{5}$

Β. $\frac{x-2}{4}-\frac{x-14}{6}=\frac{3x-2}{2}-\frac{x-2}{3}$

Γ. $\frac{x+2}{4}=4-\frac{2x+5}{3}$

(Απ. Α. $x=1$, Β. $x=2$, Γ. $x=2$)

5. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda-1)x=16$

Α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=5$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda\neq 1$.

Γ. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε για την εξίσωση αν $\lambda=1$;

Δ. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 8;

(Απ. Α. $x=4$, Β. $x=\frac{16}{\lambda-1}$, Γ. Η εξίσωση είναι αδύνατη, Δ. $\lambda=3$)

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1)+3\lambda = x+2$$

(Απ. Αν $\lambda \neq \pm 1$ τότε $x=\dfrac{\lambda-2}{\lambda+1}$, αν $\lambda=1$ τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα, αν $\lambda=-1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη)

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $-4x^2+(2x+1)(2x-1)+2x=0$

Β. $2x^2-x^3+x-2=0$

Γ. $x^3-3x^2+(1-2x)(x-3)=0$

(Απ. Α. $x=\dfrac{1}{2}$, Β. $x=2$, $x=1$ και $x=-1$, Γ. $x=1$ και $x=3$)

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\dfrac{2|x|+8}{3}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2|x|+8}{5}$

Β. $|2x+5|=3$

(Απ. Α. $x=\pm 1$, Β. $x=-1$ και $x=-4$)

9. Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$

(Απ. $x=-\frac{9}{5}$ και $x=-5$)

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x^2-9}$

Β. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

Υπόδειξη: Β. Προσοχή στους περιορισμούς!

(Απ. Α. $x=1$, Β. αδύνατη)

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $|2x+5|=|3x-2|$

Β. $|3x-2|=2x-8$

Υπόδειξη: Α. Η εξίσωση $|f(x)|=|g(x)|$ έχει λύσεις: $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

Β. Όταν έχουμε εξίσωση της μορφής $|f(x)|=g(x)$ τότε πρέπει να είναι $g(x)\geq 0$.

Οι λύσεις είναι: $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

(Απ. Α. $x=7$ ή $x=-\frac{3}{5}$, Β. αδύνατη)

12. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{x^3-27}{x-3}=x^2+12$$

(Απ. $x=1$)

13. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\left|3|x|-2\right|=4$$

(Απ. $x=\pm 2$)

14. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=|5x-7|$$

(Απ. $x=\frac{5}{4}$ ή $x=\frac{3}{2}$)

15. Ένα μηχανάκι κινείται με 80 km/h. Ένα αυτοκίνητο που κινείται με 100 km/h προσπερνάει το μηχανάκι. Σε πόσα λεπτά το αυτοκίνητο θα βρίσκεται 2 km μπροστά από το μηχανάκι;

(Απ. 6 λεπτά)

ΘΕΩΡΙΑ

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Σημειώστε ότι:

- Αν ο ν περιττός, τότε η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha^{\nu}$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$.
- Αν ο ν άρτιος, τότε η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha^{\nu}$ έχει δύο λύσεις,

  τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^3 - 216 = 0$

Β. $x^4 - 256 = 0$

Γ. $x^5 - 1 = 0$

Δ. $x^5 + 1 = 0$

(Απ. Α. $x = 6$, Β. $x = \pm 4$, Γ. $x = 1$, Δ. $x = -1$)

2. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^6 - 64 = 0$

Β. $x^5 - 64x^2 = 0$

Γ. $x^4 - x = 0$

Δ. $x^5 + 81x = 0$

(Απ. Α. $x = \pm 2$, Β. $x = 0$ ή $x = 4$, Γ. $x = 0$ ή $x = 1$, Δ. $x = 0$)

3. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(x-1)^3=27$

Β. $(x+3)^4=16$

Γ. $1+27x^3=0$

Δ. $(x-2)^4-64(x-2)=0$

(Απ. Α. $x=4$, Β. $x=-1$ ή $x=-5$, Γ. $x=-\frac{1}{3}$, Δ. $x=2$ ή $x=6$)

4. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(2x-4)^5=-32$

Β. $(2x-4)^3-121(2x-4)=0$

(Απ. Α. $x=1$, Β. $x=2$ ή $x=\frac{15}{2}$ ή $x=-\frac{7}{2}$)

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

<u>Εξισώσεις 2ου Βαθμού</u>

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

<u>Τύποι του Vieta</u>

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2.

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο $x_1\cdot x_2$ τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

- ✓ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta μετασχηματίζεται μετά από πράξεις ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2 - 3x + 2 = 0$

Β. $x^2 - 2x + 1 = 0$

Γ. $x^2 + x - 6 = 0$

Δ. $x^2 - 2x + 3 = 0$

(Απ. Α. $x = 1$ ή $x = 2$, Β. $x = 1$, Γ. $x = 2$ ή $x = -3$, Δ. αδύνατη)

2. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $2x^2 + 32 = 0$

Β. $3x^2 - x = 0$

Γ. $x^2 - 4 = 0$

(Απ. Α. αδύνατη, Β. $x = 0$ ή $x = \frac{1}{3}$, Γ. $x = 2$ ή $x = -2$)

3. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2+30x+198=0$$

χωρίς να τη λύσετε.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τους τύπους του Vieta.

(Απ. $S=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{30}{1}=-30$, $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{198}{1}=198$)

4. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(2x^2-18)^2+(x-3)^2=0$

Β. $(x-3)^2+5=0$

Γ. $3(x^2-5x+6)^{2012}=0$

(Απ. Α. $x=3$, Β. αδύνατη, Γ. $x=2$ ή $x=3$)

5. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$$

(Απ. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x=\frac{1}{2}$)

6. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:

Α. 3 και 4

Β. 2 και $\frac{1}{2}$

Γ. 3 και $\sqrt{2}$

(Απ. Α. $x^2-7x+12=0$, Β. $2x^2-5x+2=0$, Γ. $x^2-(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}=0$)

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^2-\lambda x-1=0$$

έχει δύο λύσεις για κάθε τιμή του λ.

<u>Υπόδειξη:</u> Αρκεί να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι θετική για κάθε τιμή του λ.

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$x^2-2x+\lambda=0$$

έχει μια πραγματική ρίζα.

(Απ. $\lambda=1$)

9. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2+|x|-2=0$

Β. $2(x-2)^2-3|x-2|+1=0$

(Απ. Α. $x=\pm1$, Β. $x=1$, $x=3$, $x=\frac{3}{2}$ και $x=\frac{5}{2}$)

10. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+3=0$$

(Απ. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$)

11. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

(Απ. $x=\alpha$ ή $x=\beta$)

12. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$$

(Απ. $x=2$ ή $x=\frac{8}{5}$)

13. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

$$\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$$

Υπόδειξη: Αρκεί να αποδείξετε ότι είναι: $\Delta \geq 0$.

14. Έστω ότι η μια ρίζα της εξίσωσης

$$x^2 + \beta x - 4 = 0$$

είναι το 2.

Στην περίπτωση αυτή, να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

(Απ. $x = -2$)

15. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

Β. $x^4 + x^2 - 2 = 0$

(Απ. Α. $x = \pm 2$, Β. $x = \pm 1$)

16. Να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + \beta x + 9 = 0$ αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με την εξίσωση $4x + 2 = 0$.

(Απ. $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{9}{2}$)

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ανισώσεις 1[ου] Βαθμού

Οι ανισώσεις $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Έχουμε ότι:

$$\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$$

- Αν $\alpha>0$, τότε:

$$x>-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha<0$, τότε:

$$x<-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται: $0x>-\beta$, η οποία:

✓ Αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν είναι $\beta>0$
✓ Είναι αδύνατη, αν είναι $\beta\leq 0$

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

➢ $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$
➢ $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $-\frac{2x+3}{4}-\frac{3x}{16}\geq-\frac{x+5}{8}+1$

Β. $\frac{x-1}{2}+\frac{2(x-2)}{4}<\frac{5x}{8}$

(Απ. Α. $x\leq-2$, Β. $x<4$)

2. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τις ανισώσεις:

$$-x-14<\frac{x+7}{2}+\frac{1-x}{3} \quad \text{και} \quad 5x+3\leq\frac{x+7}{2}+\frac{1-x}{3}$$

(Απ. $\frac{-107}{7}<x\leq\frac{5}{29}$)

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$5-3(x+2)\geq 2x-1 \quad \text{και} \quad 2(x+3)+5\leq 3x-2$$

(Απ. όχι)

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $|x| < 5$

Β. $|x-1| \le 3$

Γ. $|x| \ge 2$

Δ. $|2x+3| > 4$

(Απ. Α. $-5 < x < 5$, Β. $-2 \le x \le 4$, Γ. $x \le -2$ ή $x \ge 2$, Δ. $x < -\frac{7}{2}$ ή $x > \frac{1}{2}$)

5. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{|x|-4}{2} + \frac{2|x|+1}{4} \le \frac{|x|}{8}$$

(Απ. $-2 \le x \le 2$)

6. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι:

$$3 \le |x-2| \le 5$$

(Απ. $x \in [-3,-1] \cup [5,7]$)

7. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\sqrt{x^2-4x+4}\leq 3$$

(Απ. $-1\leq x\leq 5$)

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $-4\leq x-2\leq 5$

Β. $5\leq 2(x+3)-3\leq 9$

Γ. $8\leq 2(1-3x)\leq 14$

(Απ. Α. $-2\leq x\leq 7$, Β. $1\leq x\leq 3$, Γ. $-2\leq x\leq -1$)

9. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $|x-4|=6x-12$

Β. $|2x-3|=3x+6$

(Απ. Α. $x=\frac{16}{7}$, Β. $x=-\frac{3}{5}$)

ΘΕΩΡΙΑ

Ανισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

Μορφές Τριωνύμου

- Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ λέγεται τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ή πιο απλά τριώνυμο.
- Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ λέγεται και διακρίνουσα του τριωνύμου.
- Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δηλαδή οι:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ονομάζονται και ρίζες του τριωνύμου.

Αποδεικνύεται μετά από πράξεις ότι ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2),$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν $\Delta=0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta<0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Πρόσημο των Τιμών του Τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α**, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Τα παραπάνω συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \quad \text{ή} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \alpha\neq 0$$

Τις ανισώσεις αυτές τις ονομάζουμε ανισώσεις 2ου βαθμού.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

Α. $2x^2-5x+3=0$

Β. x^2+x-6

Γ. $4x^2+7x-2=0$

(Απ. Α. $(x-1)(2x-3)$, Β. $(x-2)(x+3)$, Γ. $(x+2)(4x-1)$)

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

Α. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Β. $\dfrac{2x^2-x-6}{3(x-2)}$

Γ. $\dfrac{(x+1)^2-4x}{2(x-1)}$

(Απ. Α. $\dfrac{x-2}{x+2}$, Β. $\dfrac{2x+3}{3}$, Γ. $\dfrac{x-1}{2}$)

3. Να λύσετε τις ανισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2-3x+2\geq 0$

Β. $2x^2-3x+1<0$

Γ. $x^2+x-6\leq 0$

(Απ. Α. $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, Β. $x\in(\frac{1}{2},1)$, Γ. $x\in[-3,2]$)

4. Να λύσετε τις ανισώσεις που ακολουθούν:

Α. $6x^2\leq 12x$

Β. $4x^2-6x-10<0$

Γ. $3x^2+5x-8>0$

Δ. $-2x^2+3x-1\geq 0$

(Απ. Α. $x\in[0,2]$, Β. $x\in(-1,\frac{5}{2})$, Γ. $x\in(-\infty,-\frac{8}{3})\cup(1,+\infty)$, Δ. $x\in[\frac{1}{2},1]$)

5. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

Β. $x^2 - 4x + 4 < 0$

Γ. $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Δ. $-x^2 + 6x - 9 \leq 0$

Ε. $-x^2 + 8x - 16 \geq 0$

(Απ. Α. $x \in \mathbb{R}$, Β. αδύνατη, Γ. $x \in [1,2]$, Δ. $x \in \mathbb{R}$, Ε. $x = 4$)

6. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$-\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) > 0$$

(Απ. $x \in (1,4)$)

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση που ακολουθεί:

$$\frac{x^2 - \alpha x + 2\beta x - 2\alpha\beta}{x^2 + 3\beta x + 2\beta^2}$$

(Απ. $\frac{x-\alpha}{x+\beta}$)

8. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \quad \text{και} \quad 2x^2 - x - 3 < 0$$

(Απ. $x \in (1, \frac{3}{2})$)

9. Α. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha^3 - \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + \beta^3 \quad \text{και} \quad \alpha^3 - \alpha\beta^2 + 2\beta\alpha^2 - 2\beta^3$$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση που ακολουθεί:

$$\frac{\alpha^3 - \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + \beta^3}{\alpha^3 - \alpha\beta^2 + 2\beta\alpha^2 - 2\beta^3}$$

(Απ. Α. $(\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)$ και $(\alpha + 2\beta)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, Β. $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + 2\beta}$)

10. Δίνεται το τριώνυμο: $(\lambda + 1)x^2 - 4\lambda x + 2\lambda, \lambda \neq -1$.

Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

(Απ. $\lambda \in (0,1)$)

11. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 4\lambda x - 5\lambda > 0$

αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Απ. $\lambda \in (-\frac{5}{4}, 0)$)

ΘΕΩΡΙΑ

Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο

Πρόσημο Γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο:

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x)$$

ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \ldots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα).

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$.

- Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής:

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0 \quad (< 0)$$

- Ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (< 0)$

  Όπως είναι γνωστό το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα: Άρα έχουμε ότι:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$$

και

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

  αφού καμία από τις λύσεις της $A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

- Η ανίσωση της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για: $A(x) \cdot B(x) \geq 0$ και $B(x) \neq 0$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου που ακολουθεί:

$$P(x)=(3x-6)(x^2-3x+2)(x+1)$$

(Απ. $P(x)>0$ για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$, $P(x)<0$ για $x\in(-1,1)$,

$P(x)=0$ για $x=\pm1,2$)

2. Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση:

$$(x-2)(x^2+2)(x^2-4)>0$$

(Απ. $x\in(-2,2)\cup(2,+\infty)$)

3. Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση:

$$(3-x)(3x^2+9x)(x^2+5)\leq 0$$

(Απ. $x\in[-3,0]\cup[3,+\infty)$)

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $\dfrac{x-2}{x+3}>0$

Β. $\dfrac{x+3}{2-x}\leq 0$

(Απ. Α. $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$, Β. $x\in(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$)

5. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $\frac{2x+4}{x-1} > 3$

Β. $\frac{x-2}{x+1} \leq 2$

(Απ. Α. $x \in (1,7)$, Β. $x \in (-\infty,-4] \cup (-1,+\infty)$)

6. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{x}{2x-4} \leq \frac{3}{x-1}$$

(Απ. $x \in (1,2) \cup [3,4]$)

7. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\left|\frac{x+2}{x}\right| > 3$$

(Απ. $x \in (-\frac{1}{2},0) \cup (0,1)$)

ΠΡΟΟΔΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

Ακολουθίες

Η έννοια της ακολουθίας

Γενικά ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,..., ν,... στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_1, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_2 κ.λ.π.

Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται ν-οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α_ν.

Δηλαδή: $1\to \alpha_1$, $2\to \alpha_2$, $3\to \alpha_3$,..., $\nu\to \alpha_\nu$,...

Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $\alpha_{\nu+2}=\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ λέγεται αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

1. Τον αναδρομικό της τύπο και

2. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

Α. $\alpha_\nu = 3\nu + 2$

Β. $\alpha_\nu = 2\nu^2 + \nu$

Γ. $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu}$

Δ. $\alpha_\nu = |3 - \nu|$

(Απ. Α. $\alpha_1=5$, $\alpha_2=8$, $\alpha_3=11$, $\alpha_4=14$, $\alpha_5=17$, Β. $\alpha_1=3$, $\alpha_2=10$, $\alpha_3=21$, $\alpha_4=36$, $\alpha_5=55$,

Γ. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{3}$, $\alpha_4=-\frac{1}{4}$, $\alpha_5=\frac{1}{5}$, Δ. $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=1$, $\alpha_5=2$)

2. Να βρείτε τον ν-οστό όρο των ακολουθιών:

Α. $\alpha_1=2$, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+3$

Β. $\alpha_1=1$, $\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu$

(Απ. Α. $\alpha_\nu=3\nu-1$, Β. $\alpha_\nu=2^{\nu-1}$)

ΘΕΩΡΙΑ

Αριθμητική Πρόοδος

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε διαφορά της προόδου.

Άρα, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$$

ή

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$$

Αποδεικνύεται ότι:

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

Αριθμητικός Μέσος

Αποδεικνύεται ότι:

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Ο **β** λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Αποδεικνύεται ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

Πιο αναλυτικά μπορούμε να γράψουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$$

Γεωμετρική Πρόοδος

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος,** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε λόγο της προόδου.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$, οπότε αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$$

ή

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$$

Αποδεικνύεται ότι:

Ο $\nu^{\underline{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

<u>Γεωμετρικός Μέσος</u>

Αποδεικνύεται ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Ο θετικός αριθμός **β**$=\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται <u>γεωμετρικός μέσος</u> των α και γ.

<u>Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου</u>

Αποδεικνύεται ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$$

Α. Να βρείτε τον ν^{o} όρο της προόδου.

Β. Να βρείτε τον 16^{o} όρο της προόδου.

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος:

$$10, 13, 16, \ldots$$

Να βρείτε τον 21^{o} όρο της προόδου.

3. Έστω μια αριθμητική πρόοδος για τη οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\alpha_4=-1 \text{ και } \alpha_7=5$$

Να βρείτε τον 20^{o} όρο της προόδου.

4. Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί:

$$2x+2,\ 4x-1,\ 5x$$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 30 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 910.

6. Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί:

$$x^3-x^2-2,\ x^2+2x,\ 2x^3-x$$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

7. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 33 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 440.

8. Έστω ότι σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύουν τα παρακάτω:

$$\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=45 \quad \text{και} \quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{15}{2}$$

Να βρείτε το S_{30}.

9. Να υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα:

$$\frac{2\nu+1}{\nu}+\frac{2\nu+2}{\nu}+\frac{2\nu+3}{\nu}+\ldots+\frac{2\nu+\nu}{\nu}$$

10. Αν ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu=3\nu+4$, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή αποτελεί αριθμητική πρόοδο και να βρεθούν ο πρώτος όρος της (α_1) και η διαφορά της (ω).

11. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $α_ν$=3ν+2.

Α. Να βρείτε τον επόμενο όρο $α_{ν+1}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

Δ. Να βρείτε την τάξη του όρου που ισούται με 62.

12. Να γράψετε τους έξι πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου της οποίας ο πρώτος όρος και η διαφορά είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4x+3=0$$

13. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου 1,5,9,... ισούται με 285;

Πόσοι όροι αυτής της προόδου έχουν άθροισμα 19900;

14. Να βρείτε τον 8ο όρο της γεωμετρικής προόδου:

1,2,4,…

15. Να βρείτε τον αριθμό α έτσι ώστε οι αριθμοί α, 6 και 9 να αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς γεωμετρικής προόδου.

16. Έστω ότι ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με 2 και ο 7^{ος} είναι ίσος με $\frac{1}{32}$. Να βρεθεί η πρόοδος καθώς και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

17. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 21 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 216.

18. Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της γεωμετρικής προόδου για την οποία γνωρίζουμε ότι $α_3=12$ και $α_5=48$.

19. Έστω μια γεωμετρική πρόοδος $α_ν$ με λόγο τον ακέραιο λ και πρώτο όρο τον πραγματικό $α_1$. Αν ισχύει ότι:

$$α_1+α_2=6$$

και

$$α_1+α_2+α_3=14,$$

τότε:

Α. να αποδείξετε ότι $α_1≠0$ και $λ≠1$

Β. να βρείτε τον $α_7$.

20. Έστω η γεωμετρική πρόοδος:

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$$

Α. Να βρείτε τον 12^o όρο.

Β. Να βρείτε τον νιοστό όρο.

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

Δ. Να βρείτε ποιος όρος της είναι ίσος με $-\frac{1}{512}$.

21. Σε μία γεωμετρική πρόοδο (α_ν) είναι γνωστό ότι:

$$\alpha_4 = 12 \quad \text{και} \quad \alpha_9 = 384$$

Α. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της.

Β. Πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 1534.5;

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

Η έννοια της συνάρτησης

Ορισμός

> **Συνάρτηση** από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της f.

- ✓ Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε '**y ίσον f του x**'. Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x**.

  - x ⟶ ανεξάρτητη μεταβλητή
  - y ⟶ εξαρτημένη μεταβλητή

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

Συντομογραφία Συνάρτησης

Γενικά, για να οριστεί μια συνάρτηση f πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της Α.
- Το σύνολο Β.
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

→ Οι συναρτήσεις, της μορφής $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$, λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.**

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Α. $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$

Β. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-4}$

Γ. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+5}$

Δ. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$

Ε. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

ΣΤ. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

Ζ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, Β. $x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$, Γ. $x\in\mathbb{R}$, Δ. $x\in[5,+\infty)$,

Ε. $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$, ΣΤ. $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, Ζ. $x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$)

2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2-16}+\frac{x^2+3x-4}{x-2}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$ και $f(5)$.

(Απ. Α. $x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$, Β. $f(0)\rightarrow$ δεν ορίζεται, $f(4)=12$, $f(5)=15$)

3. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{2}{x+1}+3$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι: $f(x)=2$.

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, Β. $x=-3$)

4. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{x+1}{x^2-3x}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι: $g(x)=-1$.

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, Β. $x=1$)

ΘΕΩΡΙΑ

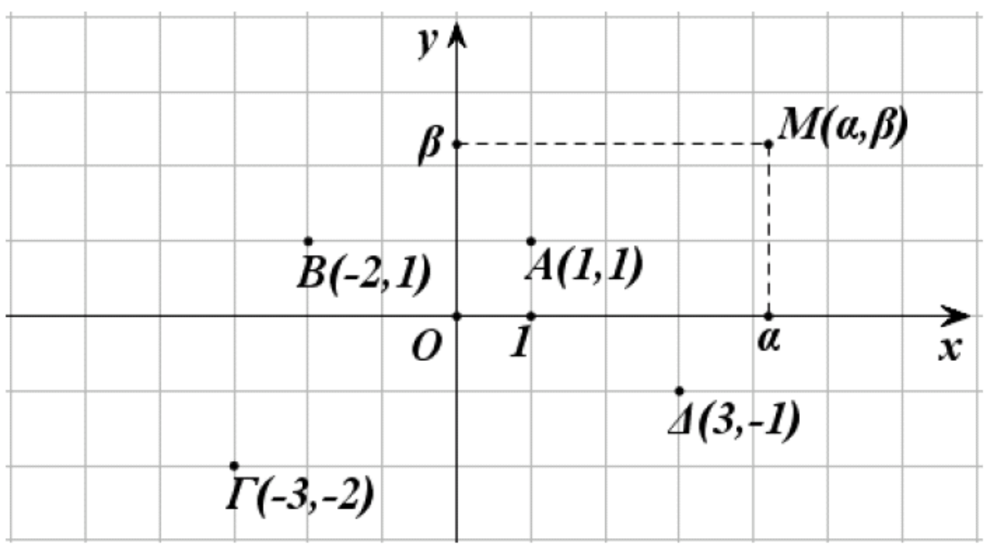
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y με κοινή αρχή ένα σημείο Ο.

- Ο οριζόντιος x΄x λέγεται άξονας των τετμημένων ή άξονας των x.
- Ο κατακόρυφος y΄y λέγεται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y.

Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου.



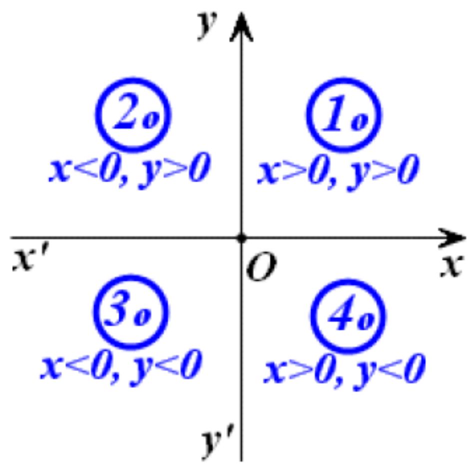
- **α, β** → συντεταγμένες του σημείου Μ

- **α** → τετμημένη του σημείου Μ

- **β** → τεταγμένη του σημείου Μ

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια.

- Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο σχήμα:



Απόσταση Σημείων

Αν Oxy είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία αυτού, τότε αποδεικνύεται ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

Α(2, 3), Β(-1, 2), Γ(-2, -1), Δ(3, -2) και Ε($\frac{1}{2}$, 3)

2. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(-2, 1)

Α. ως προς τον άξονα x΄x

Β. ως προς τον άξονα y΄y

Γ. ως προς την αρχή Ο των αξόνων

Δ. ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

3. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

Α. Ο(0, 0) και Α(5, 3)

Β. Α(2, 1) και Β(-1, 3)

Γ. Α(-1, -3) και Β(1, 4)

Δ. Α(1, -1) και Β(-2, -5)

4. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο Μ(1, 3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x)=x^2+\lambda x+3\lambda$$

(Απ. $\lambda=\frac{1}{2}$)

5. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x)=x^2-4$$

Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

6. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-5x+10 \quad \text{και} \quad g(x)=3x-6$$

Α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

Β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

7. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x)=x^3-7x^2+6x$$

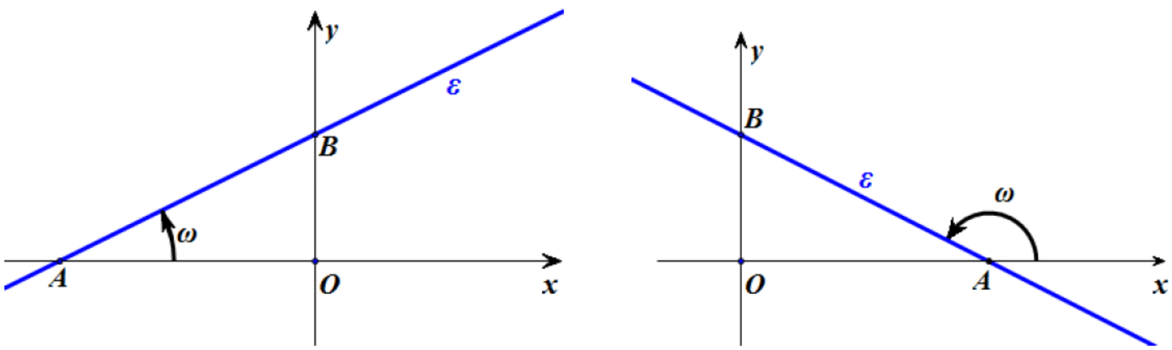
Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

Η συνάρτηση: $f(x)=\alpha x+\beta$

<u>Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α.



- Τη γωνία **ω** που διαγράφει η ημιευθεία Αx, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x.**
- Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ισχύει: $\mathbf{0^o \leq \omega \leq 180^o}$

Ως <u>συντελεστή διεύθυνσης</u> ή ως <u>κλίση</u> μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x.

→ Ο συντελεστής διεύθυνσης συμβολίζεται με: $\boldsymbol{\lambda_\varepsilon}$ ή **λ**

<u>Προσοχή:</u> Στην περίπτωση που είναι $\mathbf{\omega=90^o}$, δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x΄x, τότε **<u>δεν ορίζεται</u>** ο συντελεστής διεύθυνσης της ε.

Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης: $f(x)=\alpha x+\beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μια ευθεία, με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0, β) και έχει κλίση $\lambda=\alpha$.

Ισχύουν τα παρακάτω:

- ✓ Αν α > 0, τότε $0^o<\omega<90^o$
- ✓ Αν α < 0, τότε $90^o<\omega<180^o$
- ✓ Αν α=0, τότε $\omega=0^o$

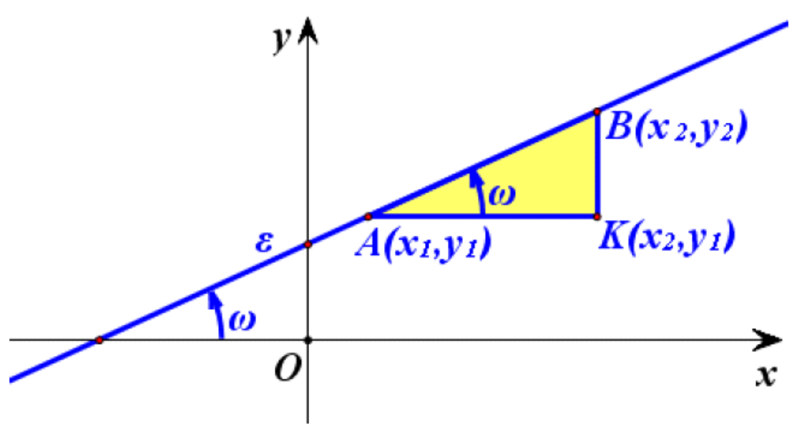
Αν α=0, τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\beta$$

(σταθερή συνάρτηση)

Για δύο τυχαία σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

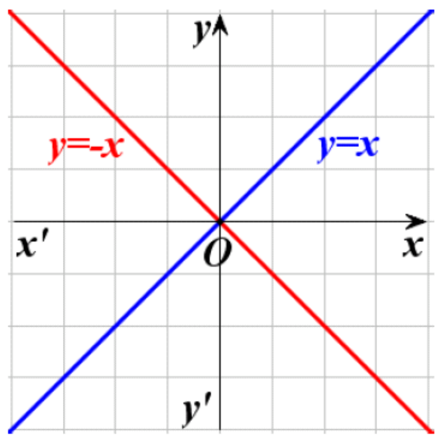


Η συνάρτηση: $f(x)=\alpha x$

Αν β=0, τότε η f παίρνει τη μορφή: $f(x)=\alpha x$

Τότε η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $y=\alpha x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- Για α=1 είναι: $y=x$
- Για α=-1 είναι: $y=-x$



Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1:\ y=\alpha_1 x+\beta_1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ y=\alpha_2 x+\beta_2$$

οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα x΄x γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

- Αν $\alpha_1=\alpha_2$ τότε εφω_1=εφω_2, οπότε $\omega_1=\omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

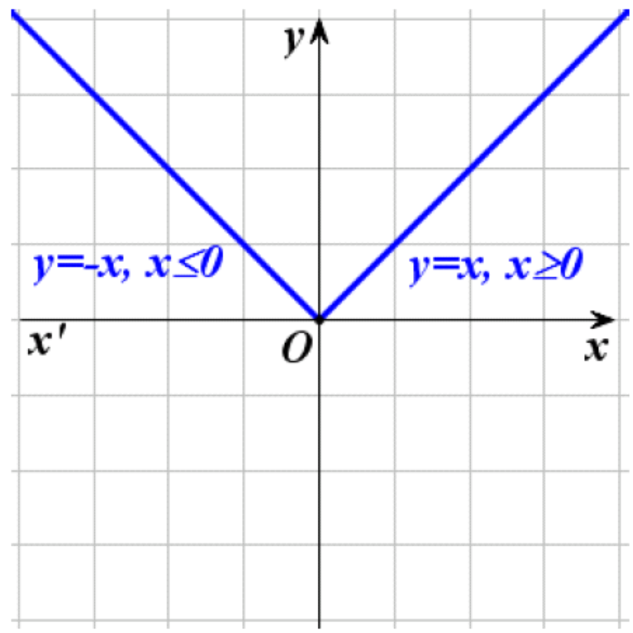
    - Αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.
    - Αν $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

- Αν $\alpha_1\neq\alpha_2$ τότε εφ$\omega_1\neq$εφω_2, οπότε $\omega_1\neq\omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

<u>Η συνάρτηση:</u> $f(x)=|x|$

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{αν } x<0\\ x, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$



ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η ευθεία:

Α. $y = x + 1$

Β. $y = \sqrt{3}x + 1$

Γ. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

Δ. $y = -x + 5$

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

Α. Α(1, 2) και Β(-1, 3)

Β. Α(-1, 3) και Β(2, 3)

Γ. Α(1, 1) και Β(5, 7)

Δ. Α(3, 2) και Β(-4, 2)

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση $\alpha = -2$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(1, 2).

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα παρακάτω σημεία:

Α. Α(2, 3) και Β(1, 2)

Β. Α(-1, 2) και Β(3, 6)

Γ. Α(1, 1) και Β(5, 7)

Δ. Α(-2, -3) και Β(-1, 4)

Ε. Α(1, -2) και Β(-2, 4)

ΣΤ. Α(5, 8) και Β(1, 3)

Ζ. Α(6, -6) και Β(2, -2)

ΘΕΩΡΙΑ

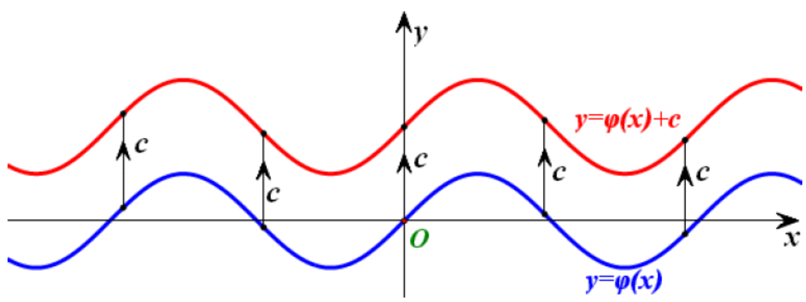
Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Κατακόρυφη Μετατόπιση Καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)+c,\ \text{όπου } c>0\ ,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α΄)

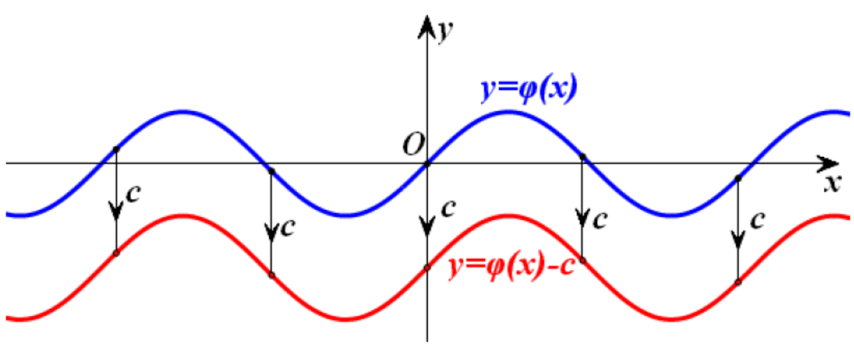


Σχήμα α΄

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)-c,\ \text{όπου } c>0\ ,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β΄)



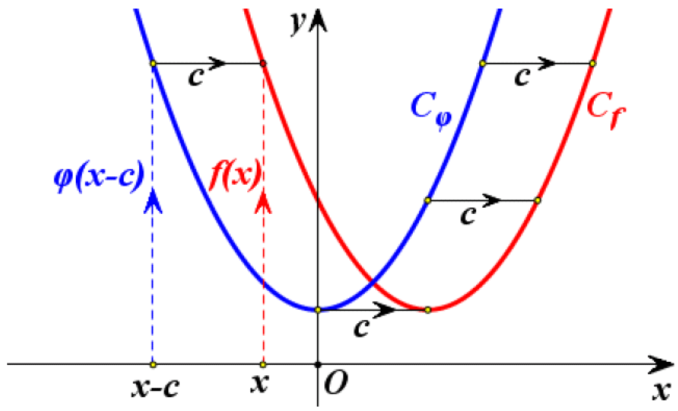
Σχήμα β΄

<u>Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης</u>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f(x)=\varphi(x-c),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ΄).

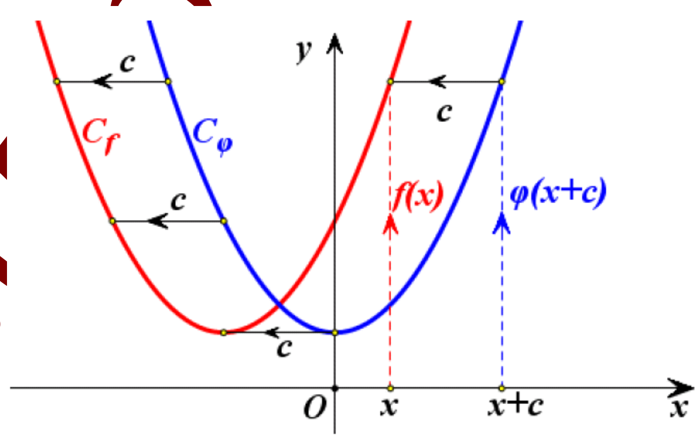


<u>Σχήμα γ΄</u>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x)=\varphi(x+c),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ΄).



<u>Σχήμα δ΄</u>

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|,\qquad f(x)=|x|+3,\qquad g(x)=|x|-3$$

2. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|,\qquad f(x)=|x+3|,\qquad g(x)=|x-3|$$

3. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|,\qquad f(x)=|x+3|+2,\qquad g(x)=|x-3|-2$$

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

<u>Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης</u>

<u>Μονοτονία Συνάρτησης</u>

<u>Ορισμός</u>

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>Ορισμός</u>

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

→ Γενικά, μια συνάρτηση που είναι είτε <u>γνησίως αύξουσα</u> είτε <u>γνησίως φθίνουσα</u> σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και Μέγιστο Συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

- Το $x_o \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**
- Το $f(x_o)$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της f ($\min f(x)$)

Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

- Το $x_o \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**
- Το $f(x_o)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f ($\max f(x)$)

→ Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Άρτια Συνάρτηση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y

Περιττή Συνάρτηση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή,** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

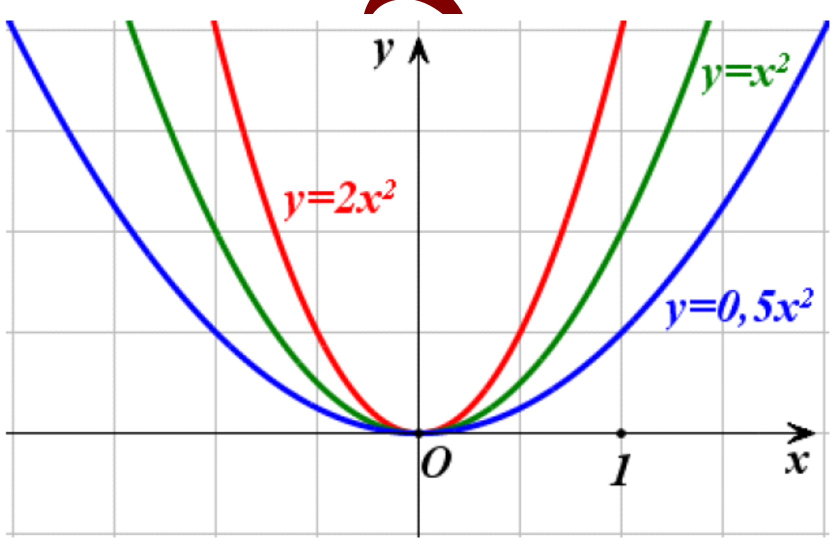
<u>Η Συνάρτηση:</u> $f(x) = \alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\alpha > 0$ έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha > 0$	$+\infty$ ↘	**0** **min**	↗ $+\infty$

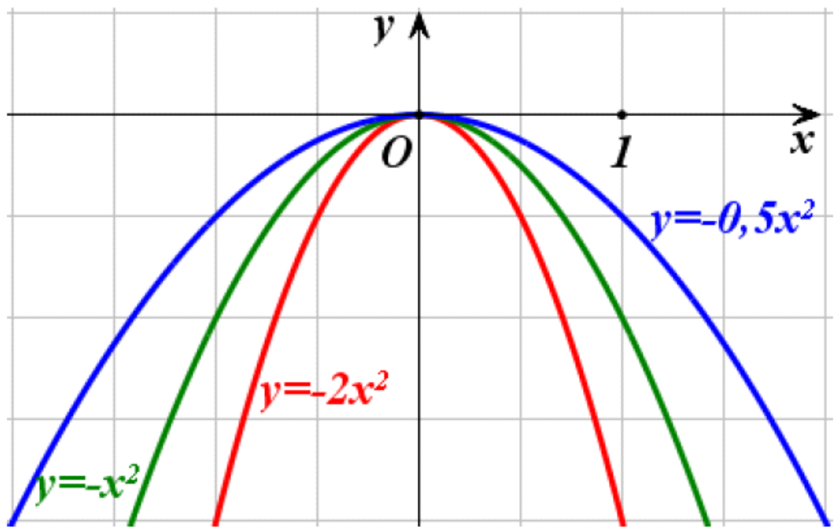
Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = 0,5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



➢ Αν $\alpha<0$ έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2$ $\alpha<0$	$-\infty$ $\nearrow$	max 0	$\searrow$ $-\infty$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\alpha x^2$ για $\alpha=-0,5$, $\alpha=-1$ και $\alpha=-2$.



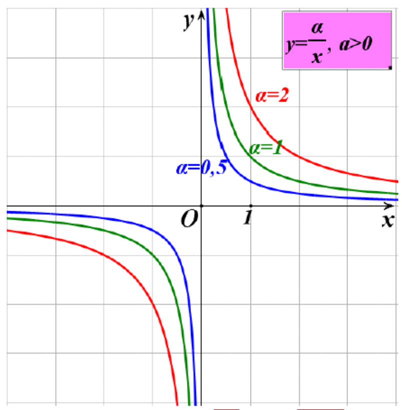
→ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, με $\alpha\neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται <u>παραβολή</u> με <u>κορυφή</u> την αρχή των αξόνων και <u>άξονα συμμετρίας</u> τον άξονα y΄y.

ΘΕΩΡΙΑ

Η Συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$

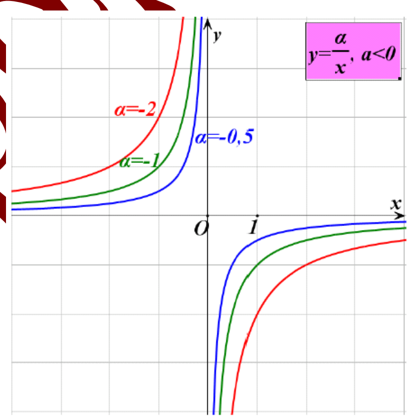
- $\alpha>0$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha=0,5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



- $\alpha<0$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha=-0,5$, $\alpha=-1$ και $\alpha=-2$.



→ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha\neq 0$, λέγεται ισοσκελής υπερβολή με κέντρο την αρχή Ο(0,0) και ασύμπτωτες τους άξονες x΄x και y΄y.

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

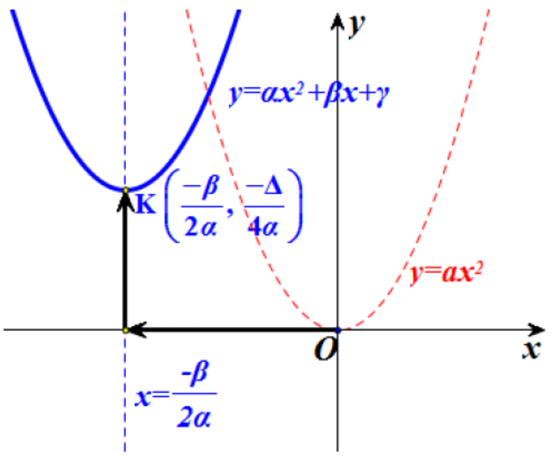
<u>Η Συνάρτηση:</u> $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

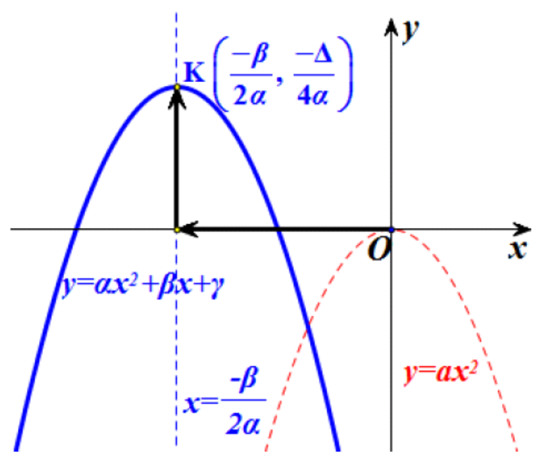
Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ είναι μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο:

$$\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία:

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$





- Αν $\alpha>0$ έχουμε:

x	$-\infty$	$\frac{-\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha>0$	$+\infty$ ↘	$\frac{-\Delta}{4\alpha}$ min	↗ $+\infty$

➢ Αν $\alpha < 0$ έχουμε:

x	$-\infty$ $\qquad$ $\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗ $\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max ↘ $-\infty$

✓ Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα σχήματα που ακολουθούν: